CAPES EXTERNE DE MATHEMATIQUES

Epreuve sur dossier

Thème : Géométrie dans l'espace,
Surfaces et sections planes de surfaces

1. Situation proposée au candidat

On considère la surface représentant dans un orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x\,;y) = y^2 - x^2$.
On veut étudier les sections de cette surface par des plans parallèles aux plans de coordonnées.

2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

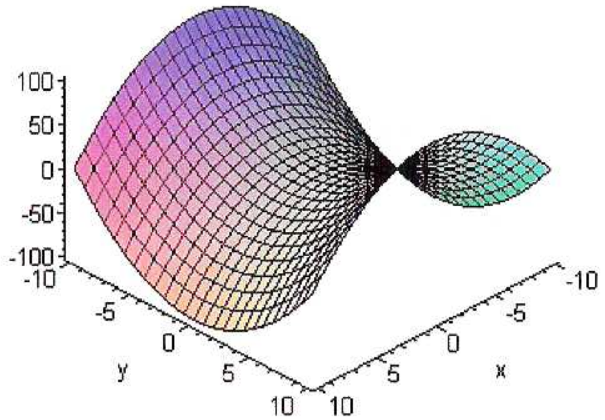
Q1) Proposer un énoncé permettant à des élèves de Terminale S, spécialité mathématiques, d'étudier cette situation.
Q2) .Discuter l'intérêt d'une calculatrice graphique pour cette étude.
Q3) Vérifier que par tout point de cette surface passent deux droites, et deux seulement, qui sont entièrement contenues dans la surface. Déterminer la section de la surface par le plan défini par ces deux droites.
Cette étude peut-elle être proposée à des élèves de Terminale S, spécialité mathématiques ?

Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q1)
- Proposer un ou plusieurs exercices menant à l'étude d'autres surfaces figurant au programme de spécialité mathématiques de la classe de terminale S.

Thème : Géométrie dans l'espace,
Surfaces et sections planes de surfaces

1) L'exercice proposé au candidat



On note S la surface étudiée.

- – On coupe S par un plan parallèle à (yOz) d'équation $x = a$.

  on note $A(a, 0, 0)$.

  Dans le plan d'équation $x = a$, muni du repère $(A, \vec{j}, \vec{k})$:

  $$z = y^2 - a^2$$

  $f(y) = y^2 - a^2 \quad f'(y) = 2y \qquad f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$

  donc la section est une parabole $\mathcal{P}_a$ de sommet $S_a(a, 0, -a^2)$

  – Dans le plan xOz, on a donc $z = -x^2$, les sommets S_a décrivent donc une parabole quand a décrit $\mathbb{R}$.

- On coupe S par un plan parallèle à (xOz) d'équation $y = b$.

  on note $B(0, b, 0)$

  Dans le plan d'équation $y = b$, muni du repère $B(\vec{i}, \vec{k})$

  $z = b^2 - x^2$, c'est donc une parabole de sommet $(0, b, b^2)$

  – Dans le plan yOz, on a donc $z = y^2$

- – Dans le plan d'équation $z = c$ muni du repère $(C, \vec{i}, \vec{j})$

  $c = y^2 - x^2$

  on considère $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$.

  $X\vec{u} + Y\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = x \\ X - Y = y \end{cases}$

  $M \in \mathcal{H}_c \Leftrightarrow y^2 - x^2 = c$

  $\Leftrightarrow (X - Y)^2 - (X + Y)^2 = c$

  $\Leftrightarrow XY = -c/4$.

  $\mathcal{H}_c$ est donc une hyperbole et a pour asymptotes les droites dirigées par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ passant par C.

+ $\mathcal{G}$ cas où $c = 0$

2) Le travail demandé au candidat :

Q1) On considère la surface S représentant dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = y^2 - x^2$

1) On coupe S par un plan parallèle à (yOz) d'équation $x = a$.

a) Démontrer que la section est une parabole P_a dont on déterminera les coordonnées du sommet S_a.

b) Justifier que les sommets S_a décrivent une parabole quand a décrit $\mathbb{R}$. Dans quelle plan se trouve cette parabole ?

2) On coupe S par un plan parallèle à (xOz) d'équation $y = b$.

Démontrer que la section Q_b est une parabole.

quel est l'ensemble des sommets de ces paraboles quand b décrit $\mathbb{R}$?

3) On coupe S par un plan parallèle à (xOy) d'équation $z = c$

a) Déterminer l'équation de la section H_c dans le repère $(C, \vec{i}, \vec{j})$ où C est le point de l'espace de coordonnées $(0, 0, c)$.

2) Déterminer la nature de H_c

Q2) cf calculatrice

On visualise la figure, puis on observe les sections par des plans parallèles aux plans de coordonnées.

Enfin on peut vérifier les équations trouvées dans notre résolution.

Q3). Soit $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S \Leftrightarrow z_0 = y_0^2 - x_0^2$

Soit $\mathcal{D}(M_0, \vec{u})$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$\forall K \in \mathbb{R}$ $\quad \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow z - z_0 = Kc$

d'où $y^2 - x^2 - (y_0^2 - x_0^2) = Kc$

$\Leftrightarrow (y_0 + Kb)^2 - (x_0 + Ka)^2 - y_0^2 + x_0^2 = Kc$

$\Leftrightarrow K(b^2 - a^2) = c + 2x_0 a - 2y_0 b \quad \forall K$

donc $\begin{cases} b^2 - a^2 = 0 \\ c + 2x_0 a - 2y_0 b = 0 \end{cases}$ on trouve $\vec{u_1}\begin{pmatrix} a \\ a \\ 2a(y_0 - x_0) \end{pmatrix}$

et $\vec{u_2}\begin{pmatrix} a \\ -a \\ -2a(y_0 + x_0) \end{pmatrix}$

on cherche $\vec{u}$ orthogonal au plan $(M_0, \vec{u_1}, \vec{u_2})$

$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{u_1} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u}\begin{pmatrix} -2x_0 \\ 2y_0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$M \in (M_0, \vec{u_1}, \vec{u_2}) \Leftrightarrow -2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0$

$M \in S \Leftrightarrow y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = x^2 - 2xx_0 + x_0^2$

$\Leftrightarrow (y - y_0)^2 = (x - x_0)^2$

Donc deux possibilités : (1) $\begin{cases} y - y_0 = x - x_0 \\ z = y^2 - x^2 \end{cases}$ ou (2) $\begin{cases} y - y_0 = -x + x_0 \\ z = y^2 - x^2 \end{cases}$

par exemple (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + t \\ z = (y_0 - x_0)(x_0 + y_0 + 2t) = z_0 + 2t(y_0 - x_0) \end{cases}$

$\rightarrow$ droite de vect. $\vec{u_1}$ et passe par M_0. De même avec (2).