

CAPES EXTERNE DE MATHÉMATIQUES

Epreuve sur dossier

Thème : Analyse Suites arithmétiques ou géométriques

1. Exercice proposé au candidat

On suppose que dans une période donnée, la population d'un pays est constante et égale à 60 millions d'habitants, dont 40 millions vivent en zone rurale et 20 millions en ville. On constate que les mouvements de population sont décrits par la règle suivante : chaque année 20% des ruraux émigrent à la ville et 10% des citadins émigrent en zone rurale. On note respectivement v_n et r_n les effectifs (en millions) des citadins et des ruraux au bout de n années.

Première méthode.

1) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$v_{n+1} = 0,9 v_n + 0,2 r_n \quad \text{et} \quad r_{n+1} = 0,1 v_n + 0,8 r_n.$$

2) Que vaut $v_n + r_n$? En déduire les relations :

$$v_{n+1} = 0,7 v_n + 12 \quad \text{et} \quad r_{n+1} = 0,7 r_n + 6.$$

3) Exprimer r_n et v_n en fonction de n et étudier les limites de (r_n) et (v_n) .

Deuxième méthode.

1) On considère la suite (p_n) définie par $p_n = \frac{v_n}{r_n}$.

Montrer qu'elle vérifie les relations : $p_0 = 0,5$ et $p_{n+1} = \frac{9p_n + 2}{p_n + 8}$.

2) On pose $q_n = \frac{p_n - 2}{p_n + 1}$. Montrer que la suite (q_n) est géométrique et exprimer q_n et p_n en fonction de n .

3) Calculer la limite de la suite (p_n) puis celles des suites (v_n) et (r_n) .

2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1) Dégager les méthodes utilisées et les différentes connaissances mises en œuvre dans cet exercice.

Q2) Indiquer comment un élève de Terminale S pourrait trouver la limite de (p_n) sans introduire la suite (q_n) .

Q3) Expliquer le choix de la suite (q_n) .

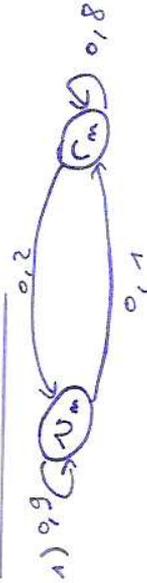
Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q3)
- les énoncés d'un ou deux autres exercices menant à l'étude de suites arithmétiques ou géométriques.

Thème: Analyse
Suites arithmétiques ou géométriques

1) L'exercice proposé au candidat

Première méthode:



$$u_{n+1} = 0,9 u_n + 0,2 r_n$$

$$r_{n+1} = 0,1 u_n + 0,8 r_n$$

$$2) u_n + r_n = u_{n-1} + r_{n-1} = \dots = u_0 + r_0 = 60$$

$$u_{n+1} = 0,9 u_n + 0,2 (60 - u_n) = 0,7 u_n + 12$$

$$r_{n+1} = 0,1 (60 - u_n) + 0,8 r_n = 0,7 r_n + 6$$

$$3) r_{n+1} = 0,7 r_n + 6$$

$$= 0,7 (0,7 r_{n-1} + 6) + 6$$

= ...

$$= 0,7^{n+1} r_0 + 6 \sum_{k=0}^n 0,7^k$$

$$= 0,7^{n+1} r_0 + 6 \times \frac{1 - (0,7)^{n+1}}{1 - 0,7} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{0,3} = 20$$

de même $v_{n+1} = 0,7 v_n + 12$

$$= 0,7 (0,7 v_{n-1} + 12) + 12$$

= ...

$$= 0,7^{n+1} v_0 + 12 \sum_{k=0}^n 0,7^k$$

$$= 0,7^{n+1} v_0 + 12 \frac{1 - 0,7^{n+1}}{1 - 0,7} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{12}{0,3} = 40$$

Deuxième méthode:

$$1) p_0 = \frac{20}{40} = 0,5$$

$$p_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{r_{n+1}} = \frac{0,9 v_n + 0,2 r_n}{0,1 v_n + 0,8 r_n}$$

$$= \frac{0,9 \frac{v_n}{r_n} + 0,2}{0,1 \frac{v_n}{r_n} + 0,8} \quad r_n \neq 0$$

$$= \frac{9 p_n + 2}{p_n + 8}$$

$$= \frac{9 p_n + 2}{p_n + 8}$$

$$2) \frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{p_{n+1} - 2}{p_{n+1} + 1} \times \frac{p_n + 1}{p_n - 2}$$

$$= \frac{7 p_n - 14}{p_n + 8} \times \frac{p_n + 1}{10 p_n + 10} \times \frac{p_n + 1}{p_n - 2}$$

$$= 7/10 \quad \text{Ainsi } (q_n) \text{ est géométrique de raison } 7/10$$

$$q_n = q_0 \times 0,7^n = -0,7^n$$

$$\text{Ainsi: } -0,7^n = \frac{p_n - 2}{p_n + 1} \Leftrightarrow$$

$$p_n = \frac{2 - 0,7^n}{1 + 0,7^n}$$

3) On trouve donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 2$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$ et comme pour tout n $v_n + r_n = 60$

on trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 40$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 20$.

2) Le travail demandé au candidat

- Q1) Expression d'une suite
- savoir que $v_n + r_n = 60 \forall n$
 - expression de v_n et r_n par récurrence descendante
 - expression de $\sum_{k=0}^n a^k$
 - $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n$ selon la valeur de a .
 - suite géométrique
 - opérations sur les limites

Q2) on étudie la fonction $x \mapsto \frac{9x+2}{x+8}$ en cherchant les points fixes ...

Q3) Rappel : dans l'étude d'une suite de la forme $u_{n+1} = a u_n + b$, on se ramène à l'étude d'une suite géométrique en considérant $q_n = u_n - \alpha$ où α est la solution de l'équation en x : $x = ax + b$.

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} = \frac{a u_n + b - a \alpha - b}{u_n - \alpha} = a$$

Dans notre cas : on note α et β les solutions de l'équation en x :
 $x = \frac{ax+b}{cx+d}$. On introduit la suite $q_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$

$\frac{q_{n+1}}{q_n} = r$ indépendant de n (dépend uniquement de a, b, c, d)
 la suite (q_n) est donc géométrique de raison r .
 (Dans notre exemple $\alpha = 2$ et $\beta = -1$).
Exercices supplémentaires:

Exercice 1: Dans une bouteille dont la contenance est deux litres, on verse 1 litre d'eau, puis $\frac{1}{2}$ litre, puis $\frac{1}{4}$ litre, puis $\frac{1}{8}$ litre puis $\frac{1}{16}$ litre, etc. L'eau débordera-t-elle?
 La réponse serait-elle la même si la bouteille ne contenait que 1,95 litre?
 → suite géométrique
 → utilisation possible d'un tableau.

Exercice 2:

- 1) Calculer la somme des cent premiers multiples de 5.
- 2) Quelle est la somme des entiers naturels de 51 à 100.