CAPES EXTERNE DE MATHEMATIQUES

Epreuve sur dossier

Thème : Analyse, suite

1. L'exercice proposé au candidat

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$ pour tout entier naturel n non nul.

1) Vérifier que la fonction $f : t \rightarrow (2 - t)e^t$ est une primitive de $g : t \rightarrow (1 - t)e^t$. En déduire u_1.

2) Démontrer que pour tout n non nul, $u_{n+1} = (n + 1)u_n - 1$

Partie B

1) Conjecturer à la calculatrice la convergence de la suite (u_n).

2) Montrer que pour tout t appartenant à $[0 ; 1]$ et tout entier naturel n non nul $0 \leq (1 - t)^n e^t \leq e(1 - t)^n$

3) En déduire un encadrement de (u_n) puis sa limite.

Partie C

Soit un réel a, on considère la suite (v_n) définie pour tout n non nul par $v_{n+1} = (n + 1)v_n - 1$ et $v_1 = a$.

1) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $v_n = u_n + (n!)(a + 2 - e)$

2) Etudier la limite de la suite (v_n) en fonction des valeurs de a.

2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1) Indiquer le niveau auquel peut-être posé cet exercice, les connaissances et les méthodes requises pour sa résolution.

Q2) En quoi la partie C permet-elle d'expliquer la conjecture faite dans la partie B.

Q3) Rédiger une démonstration niveau première S du théorème des gendarmes.

Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q3
- un ou deux exercices d'étude d'une suite définie par une intégrale.

Thème : Analyse, suite

1) L'exercice proposé au candidat

A) $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt \qquad n \in \mathbb{N}^*$

1) $f(t) = (2-t)e^t$

$f'(t) = -e^t + (2-t)e^t = (1-t)e^t = g(t)$

donc f est une primitive de g.

$u_1 = \int_0^1 (1-t)e^t \, dt = \int_0^1 g(t)\, dt = [f(t)]_0^1 = e-2$

2) $u_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t \, dt$.

on intègre par parties en posant $\quad u' = e^t \qquad u = e^t$

$\qquad v = (1-t)^{n+1} \qquad v' = -(n+1)(1-t)^n$

$u_{n+1} = \left[e^t (1-t)^{n+1} \right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$

$= -1 + (n+1) u_n$.

B) 1) Plusieurs façons de faire :

- on entre la formule explicite et on regarde le graphe
- on entre la formule de recurrence : * on trace en " $f(n)$ "
  * on trace en "toile".

2) $\forall t \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

. $(1-t)^n \geq 0$

. $0 < e^t \leq e^1$ car $\exp : x \longmapsto e^x$ est croissante.

donc $0 \leq (1-t)^n e^t \leq e(1-t)^n$.

3) Ainsi $\quad 0 \leq u_n \leq e \int_0^1 (1-t)^n \, dt$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq e \left[-\dfrac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq e \dfrac{1}{n+1}$

Et par passage à la limite on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

C) $\begin{cases} v_{n+1} = (n+1) v_n - 1 \\ v_1 = a \end{cases}$.

1) Par récurrence sur n.

. $v_1 = a \qquad$ et $u_1 + 1!\,(a+2-e) = a \quad$ ok.

. on suppose qu'on a $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$

alors $v_{n+1} = (n+1)v_n - 1$

$= (n+1)(u_n + n!\,(a+2-e)) - 1$

$= (n+1)u_n - 1 + (n+1)n!\,(a+2-e)$

$= u_{n+1} + (n+1)!\,(a+2-e)$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n!\,(a+2-e)$

donc . si $a = e-2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

. si $a > e-2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

. si $a < e-2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

2) Le travail demandé au candidat

Q1) Exercice niveau TermS car :

- intégrales
- fonctions exponentielles
- intégration par parties
- raisonnement par récurrence.

Connaissances

- primitives
- intégrales
- fonction exp.
- intégration par parties
- théorème des gendarmes
- opérations sur les limites

Méthodes

- pour montrer une inégalité, on utilise la monotonie d'une fonction.
- pour trouver la limite d'une suite, on l'encadre par deux suites de même limite.
- raisonnement par récurrence
- disjonctions de cas

Q2) A la calculatrice, on conjecture (à tort) que la suite diverge vers $-\infty$, ceci est dû à une approximation de e,

la partie C confirme la convergence uniquement pour $a = e-2$, donc si on approxime, on a divergence !

Q3) On utilise la définition suivante.

Définition : Soit u une suite et l un réel.
Dire que la suite u admet pour limite le réel l signifie que tout intervalle ouvert $]a;b[$ centré en l contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.

Démonstration sous forme d'exercice :

on considère trois suites u, v, w et un réel tels que :

- il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq w_n \leq v_n$
- $\lim u_n = \lim v_n = l$

Soit I un intervalle ouvert centré en l.

1) a) Traduire, en considérant l'intervalle I, l'hypothèse $\lim u_n = l$

b) Traduire, en considérant l'intervalle I, l'hypothèse $\lim v_n = l$

2) En déduire que $\lim w_n = l$.

Résolution :

1) a) Il existe un rang N_1 à partir duquel tous les termes de u sont dans I.

b) Il existe un rang N_2 à partir duquel tous les termes de v sont dans I.

2) A partir du rang $N_3 = \max(N_1, N_2)$
Tous les termes de u et v sont dans I, et donc
à partir de : (on peut prendre $\max(N, N_3)$ ...)

- N_3 si $N_3 \geq N$ tous les termes de w sont dans I
car $\forall n \geq N$ $u_n \leq w_n \leq v_n$
- N si $N \geq N_3$ tous les termes de w sont dans I

exos supplémentaires cf page 344