CAPES EXTERNE DE MATHEMATIQUES

Epreuve sur dossier

Thème : Analyse, approximation d'un réel par des suites

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction f définie sur $[\frac{1}{e}\,;\,1]$ par : $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[\frac{1}{e}\,;\,1]$ une unique solution, notée α.

2. On considère la fonction h définie sur $[\frac{1}{e}\,;\,\alpha]$ par $h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

a. Démontrer que, pour tout x de $[\frac{1}{e}\,;\,\alpha]$, $h'(x) = \frac{f''(x) \times f(x)}{[f'(x)]^2}$.

b. En déduire que h est strictement croissante sur $[\frac{1}{e}\,;\,\alpha]$.

c. Etudier le signe de $h(x) - x$ sur $[\frac{1}{e}\,;\,\alpha]$.

3. On considère la suite de réels (x_n), de premier terme $x_0 = 0,4$ et telle que, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = h(x_n)$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, x_n appartient à $]\frac{1}{e}\,;\,\alpha[$.

b. Démontrer que la suite (x_n) est strictement croissante.

c. Démontrer que (x_n) converge vers α. Donner une approximation de α à 10^{-4} près par défaut.

2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1) Dégager les connaissances et les méthodes nécessaires à la résolution de cet exercice.

Q2) Comment exposer à des élèves de Terminale S la méthode utilisée dans l'exercice pour déterminer une approximation du nombre réel α ?

Q3) Proposer, à l'intention d'élèves de Terminale S, une autre méthode d'approximation de α à l'aide d'une suite de réels.

Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q2).
- L'énoncé d'un exercice sur le même thème : *approximation d'un réel par des suites.*

Thème : Analyse, approximation d'un réel par des suites

1) L'exercice proposé au candidat

$f : [1/e \,;\, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 1 + \ln x / x$.

1) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\ln x}{x^2}$

or sur $[1/e \,;\, 1]$, $\ln(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$, on a donc le tableau de variations suivant :

x	$1/e$		α		1
$f'(x)$			$+$		
f	$1-e$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

$f(1/e) = 1 + e\ln(1/e)$
$= 1 + e\ln(e^{-1})$
$= 1 - e < 0$

$f(1) = 1 + \ln(1) = 1 > 0$

Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[1/e \,;\, 1]$ une unique solution.

2) $h : [1/e \,;\, \alpha] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x - f(x)/f'(x)$

a) $h'(x) = 1 - \dfrac{f'(x)^2 - f(x) \times f''(x)}{f'(x)^2} = \dfrac{f''(x) \times f(x)}{f'(x)^2}$

b) sur $[1/e \,;\, \alpha]$ on a : $f(x) \leq 0$ et $f'(x)^2 > 0$

Etudions alors le signe de f''.

$f''(x) = -\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{x - 2x\ln x}{x^4}$

$= -\dfrac{3}{x^3} + 2\dfrac{\ln x}{x^3}$ or, sur $[1/e \,;\, \alpha]$, $\ln(x) < 0$, d'où $f''(x) < 0$

Bilan : sur $[1/e \,;\, \alpha]$, $h'(x) \geq 0$ et $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$

donc h est strictement croissante sur $[1/e \,;\, \alpha]$.

c) $h(x) - x = -f(x)/f'(x)$

or sur $[1/e \,;\, \alpha]$, $-f(x) \geq 0$ et $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$
$f'(x) > 0$

Bilan : sur $[1/e \,;\, \alpha]$, $h(x) - x \geq 0$ et $h(x) - x = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$

3. $x_0 = 0{,}4$ et $x_{n+1} = h(x_n)$

a)

b) $x_{n+1} - x_n = h(x_n) - x_n$

or $x_n \in]1/e\,;\alpha[$ donc d'après la question 2-c)

$h(x_n) - x_n > 0$

Bilan : (x_n) est strictement croissante.

c) cellsheet oral2\sujet7