CAPES EXTERNE DE MATHEMATIQUES

Epreuve sur dossier

Thème : Probabilités, lois de probabilité

1. L'exercice proposé au candidat

Dépister une maladie par la méthode exhaustive (tous les individus d'une population sont testés individuellement) peut être très coûteux. C'est pourquoi on utilise parfois des tests groupés.

Considérons une population de 1000 personnes dans laquelle on veut dépister, à l'aide d'un test qu'on admettra fiable, une maladie qui touche statistiquement 1 % de la population. On considère que les individus sont touchés par la maladie de façon indépendante.

Description de la méthode des tests groupés :
On répartit les 1000 individus en n groupes de r personnes. Dans chaque groupe on mélange les r prélèvements et on procède à une analyse du mélange. Lorsque le test du groupe est négatif, aucun membre du groupe n'est malade. Lorsque le test du groupe est positif, au moins une personne est malade et on procède à une analyse individuelle pour les r personnes composant le groupe.

1. a. Quelle est la probabilité que le test d'un groupe soit positif ?
b. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de groupes dont le test est positif. Caractériser la loi de X et en déduire son espérance mathématique.

2. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre total d'analyses effectuées avec la méthode des tests groupés. Calculer l'espérance mathématique de Y en fonction de r.

3. À l'aide d'une calculatrice :
a. déterminer les valeurs de r pour lesquelles la méthode des tests groupés est moins coûteuse que la méthode exhaustive ;
b. déterminer la valeur de r qui minimise le coût du dépistage.

4. La valeur de r qui minimise le coût du dépistage est-elle la même si la maladie touche 0,1 % de la population ?

2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Quelles sont les connaissances mises en jeu dans l'exercice ?

Q.2.) Démontrer la formule donnant l'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale.

Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q.2)
- un ou deux exercices illustrant la notion de loi binomiale.

Thème : Probabilités, lois de probabilité.

1) L'exercice proposé au candidat

1 - a) On note T = "le groupe testé est positif"

$P(T) = 1 - P(\overline{T})$

$\quad = 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^r$

b) X suit une loi binomiale de paramètres

$n = \frac{1000}{r}$ et $1 - \left(\frac{99}{100}\right)^r$

Son espérance vaut donc $E(X) = \frac{1000}{r}\left(1 - \left(\frac{99}{100}\right)^r\right)$

2 - $Y = n + rX$

donc $E(Y) = E(n + rX) = n + rE(X)$

$$= \frac{1000}{r} + \cancel{r} \times \frac{1000}{\cancel{r}}\left(1 - \left(\frac{99}{100}\right)^r\right)$$

$$= \frac{1000}{r}\left(1 + r\left(1 - \left(\frac{99}{100}\right)^r\right)\right)$$

3 - a) Cf oral 2 | sujet 31 ( ) (prgm)

On pour valeurs de r possibles :

$\{2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500\}$

b) la valeur de r qui minimise le coût du dépistage est $r = 10$ (dans ce cas $E(Y) = 196$).

4) si la maladie touche 0,1 % de la population, la valeur de r qui minimise le coût du dépistage est $r = 60$ (dans ce cas $E(Y) \simeq 64$).

2) Le travail demandé au candidat

Q1) - Probabilité du complémentaire d'un évènement
- indépendance de deux évènements
- variable aléatoire, loi de variable aléatoire
- loi binomiale, reconnaissance d'une loi binomiale
- formule de l'espérance d'une variable aléatoire
- espérance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$
- mettre en relation l'espérance avec le coût de la méthode.

Q2) une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut s'écrire sous la forme $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où les X_i sont des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p et indépendantes.

Par linéarité de l'espérance, on a :

$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$

Exercice supplémentaires :

Un joueur lance deux dés cubiques non pipés.
Les règles du jeu sont :

- Si les 2 dés donnent le même numéro alors le joueur perd 10 points.
- Si les 2 dés sont de parités différentes alors il perd 5 points
- Sinon il gagne 15 points.

On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de points gagnés par le joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance.

Le joueur effectue dix parties. Les résultats des parties sont indépendants les uns des autres.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de fois que le joueur gagne 15 points.

b) Expliquez pourquoi Y suit une loi binomiale. Quels sont ses paramètres ?

c) Quel est la probabilité que le joueur gagne au moins une fois 15 points ?

d) Combien de fois le joueur peut espérer gagner 15 points ?

e) A partir de quelle valeur de n la probabilité de gagner au moins 15 points est supérieure à 0,99999 ?

Notions relatives :

- probabilité d'une loi équirépartie
- dénombrement des cas favorables
- définition de la loi binomiale : répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes.
- fonctions logarithmes, propriétés.