CAPES EXTERNE DE MATHEMATIQUES

Epreuve sur dossier

Thème : Probabilités
Probabilités continues, épreuves répétées

1. L'exercice proposé au candidat

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$ ou encore « loi de durée de vie sans vieillissement ».

1- Sachant que $P(X > 10) = 0{,}286$, déterminer une valeur approchée de λ à 10^{-3} près.

Dans la suite, on prendra 0,125 pour valeur de λ.

2- Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3- Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit ans, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?
4- On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?
5- Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1) Lister les connaissances spécifiques à la classe de terminale S mises en jeu dans cet exercice.

Q2) Si on remplace la donnée « $P(X > 10) = 0{,}286$ » par $P(X \geq 10) = 0{,}286$ » la valeur de λ déterminée dans la première question change-t-elle ?

Q3) Justifier l'expression « loi de durée de vie sans vieillissement »

Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q3)
- les énoncés de deux exercices dont la résolution conduit à l'étude de lois de probabilités figurant au programme de terminale S.

Thème : Probabilités

Probabilités continues, épreuves répétées

1) L'exercice proposé au candidat

1) $P(X>10) = 1-(1-e^{-\lambda\times 10})$

$= e^{-10\lambda} = 0,286$

$\Leftrightarrow -10\lambda = \ln(0,286)$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{-\ln(0,286)}{10} \simeq 0,125$

2) $P(X\leq 1/2) = 1-e^{-0,125\times 1/2} \simeq 0,06$.

3) $P_{X>8}(X>10) = P(X>2) = 1-(1-e^{-0,125\times 2})$

$= e^{-0,125\times 2}$

$\simeq 0,78$

4) P(au moins un oscillo. ait une durée de vie supérieure à 10 ans)

$= 1 - P(X_1\leq 10 \cap X_2\leq 10 \dots \cap X_{15}\leq 10)$

$= 1 - P(X_1\leq 10)\times P(X_2\leq 10)\times\dots\times P(X_{15}\leq 10)$

$= 1 - P(X\leq 10)^{15}$

$= 1 - (1-e^{-0,125\times 10})^{15}$

$\simeq 0,994$.

5) on doit résoudre

$1-(1-e^{-0,125}\times 10)^{x} \geq 0,999$

$\Leftrightarrow x \geq 20,46$. Donc l'établissement doit acheter 21 oscilloscopes

2) Le travail demandé au candidat.

Q1) Variables aléatoires continues

- utilisation des fonctions exponentielles et logarithmes
- probabilités conditionelles.
- évènements indépendants.

Q2) Si la variable aléatoire X admet f comme densité de probabilité, alors quels que soient les réels a et b:

$P(X>a) = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Faire le lien avec les variables statistiques continues et faire diminuer le pas

Cf Bréal TS p326.

Q3) On considère deux réels a et b tels que $0<a\leq b$.

Calculons la probabilité que X soit supérieur à b sachant qu'il est supérieur à a:

$P_{X>a}(X>b) = \dfrac{P(X>b \text{ et } X>a)}{P(X>a)} = \dfrac{P(X>b)}{P(X>a)} = \dfrac{1-(1-e^{-\lambda b})}{1-(1-e^{-\lambda a})}$

$= \dfrac{e^{-\lambda b}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda(b-a)} = P(X>b-a)$

Cette propriété peut s'intepréter de la façon suivante :

a et b désignant deux dates (b ultérieure à a), la probabilité d'atteindre l'âge b sachant qu'on a atteint l'âge a ne dépend que de la durée $b-a$.

Par suite, l'espérance de durée de vie restante à un âge donné ne dépend pas de cet âge.

Cette propriété, plausible pour une particule ou un composant électronique ne l'est pas en général pour un être vivant, dont l'espérance de durée de vie restante diminue hélas avec l'âge !

Exercices supplémentaires:

Exercice 1 : variable aléatoire continue : loi uniforme.

Une rame de métro relie deux stations T_1 et T_2 (et vice-versa) en un temps qui varie entre 8 et 12 minutes.
Soit X le temps pris par la rame pour relier les deux stations lors d'un trajet.
On suppose que la loi de probabilité de X est uniforme.

1) Quelle est la probabilité que la rame effectue le trajet en moins de 9 minutes 30 secondes ?
2) Quelle est la probabilité que la rame effectue le trajet en plus de 11 minutes ?
3) Supposons que la rame quitte la station T_1 à 9 heures et qu'un passager se rende à la station T_2 à 9 heures 11. Sachant que la rame reste 1 minute en gare avant de repartir vers T_1, quelle est la probabilité qu'il rate cette rame ?

Exercice 2 : variable aléatoire discrète : loi binomiale.

Un joueur de basket sait qu'à chaque tir au panier, sa probabilité de succès est 0,8.

Au cours d'un entraînement, il envisage quatre lancers successifs. On admet que chaque lancer est indépendant des autres, et on appelle S le nombre de succès.

1) Donner la loi de probabilité de S.
2) Représenter cette loi de probabilité par un diagramme en bâtons.
3) Calculer l'espérance de S.
4) Quelle est la probabilité que le joueur réussisse :
   a) au moins un panier ?
   b) au moins trois paniers ?