CAPES EXTERNE DE MATHEMATIQUES

Epreuve sur dossier

Thème : Probabilités

1. L'exercice proposé au candidat

Une urne rouge contient 6 boules rouges et 4 boules noires, et une urne noire contient 3 boules rouges et 7 boules noires.

Les boules étant indiscernables les unes des autres, on effectue une suite de tirages au hasard d'une boule dans l'une des deux urnes, selon les règles suivantes :
- le premier tirage a lieu dans l'une des deux urnes tirée au hasard (avec équiprobabilité) ;
- après chaque tirage dans une urne, la boule est remise dans la même urne ;
- pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$, le $(n + 1)$-ième tirage a lieu dans l'urne de la couleur de la boule tirée au n-ième tirage.

Pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$, on désigne par R_n l'événement « on tire dans l'urne rouge au n-ième tirage » et par N_n l'événement « on tire dans l'urne noire au n-ième tirage ». On note p_n la probabilité de l'événement R_n et q_n probabilité de l'événement N_n.

Étudier à l'aide de la théorie des graphes l'évolution de la distribution de probabilités de cette épreuve en fonction de n.

2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1) Dégager les connaissances nécessaires à la résolution de cet exercice. Á quelle(s) classe(s) s'adresse cet exercice ?

Q2) Rédiger des questions intermédiaires permettant de guider un élève de lycée dans la résolution de l'exercice.

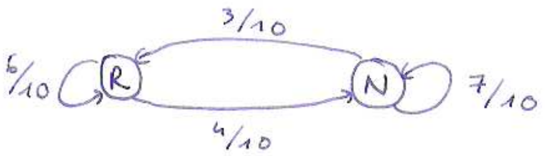
Q3) Rédiger un énoncé de cet exercice privilégiant l'utilisation d'outils autres que les graphes.

Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q3)
- les énoncés de deux exercices mettant en valeur des connaissances et des compétences exigibles d'élèves de Terminales S ou ES en calcul de probabilités.

Thème : Probabilités

1) L'exercice proposé au candidat



la matrice de transition associé au graphe est

$$\begin{array}{c|cc} & R & N \\ \hline R & 0{,}6 & 0{,}4 \\ N & 0{,}3 & 0{,}7 \end{array}$$

Ainsi la distribution de probabilité entre R et N évolue vers

$$\begin{array}{cc} R & N \\ \end{array}$$
$$\left(\frac{3}{7} \quad \frac{4}{7} \right)$$

2) Le travail demandé au candidat

Q1) Cet exercice s'adresse à une classe de Terminale ES option maths

Connaissances nécessaires :

- graphe probabiliste
- matrice de transition
- Théorème : soit un système évolutif pouvant être dans l'état E ou l'état E', le passage de l'un à l'autre étant régi par la matrice de transition $\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$

On suppose que les nombres a et b, compris entre 0 et 1, ne sont pas tous les deux égaux à 0 ni tous les deux égaux à 1. Alors la distribution de probabilité entre E et $\bar{E}$ évolue vers : $\left(\frac{b}{a+b} \quad \frac{a}{a+b} \right)$.

Q2) 1) Etablir un graphe représentant l'évolution au cours du temps du système (pouvant être dans l'état R ou N)

2) Donner la matrice de transition associé au graphe

3) En déduire l'évolution de la distribution de probabilité au cours du temps.

Q3) Avec les suites :

1) Donner les suites imbriquées $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$.

$$\begin{cases} p_{n+1} = 0{,}6p_n + 0{,}3q_n \\ q_{n+1} = 0{,}4p_n + 0{,}7q_n \end{cases}$$

2) que peut-on dire de p_0+q_0, p_1+q_1, ..., p_n+q_n ?

$$p_0+q_0 = p_1+q_1 = \dots = p_n+q_n = 1$$

3) A l'aide de la question précédente, "désimbriquer" les suites.

$$p_{n+1} = 0{,}6p_n + 0{,}3(1-p_n) = 0{,}3p_n + 0{,}3$$

$$q_{n+1} = 0{,}4(1-q_n) + 0{,}7q_n = 0{,}3q_n + 0{,}4$$

4) Calculer les limites de $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$, notées p et q

on a par passage à la limite :

$$p = 0{,}3p + 0{,}3 \Leftrightarrow p = 3/7$$

$$q = 0{,}3q + 0{,}4 \Leftrightarrow q = 4/7$$

remarque : $p_n - p$ est géométrique de raison 0,3 donc converge vers 0 ainsi p_n converge bien vers p.

Exercices supplémentaires :

Exercice 1 : Dans un atelier, 40 % des pièces sont fabriquées par une machine M_1 et 60 % par une machine M_2.
La proportion de pièces défectueuses fabriquées par M_1 est de 3 %
——— M_2 est de 2 %

On choisit une pièce au hasard.

1) Calculer la probabilité qu'elle soit défectueuse
2) Calculer la probabilité qu'elle provienne de M_1 si elle est défectueuse

→ Probabilités conditionnelles

→ Formule des probabilités totales

Exercice 2 : Une rame de métro relie deux stations T_1 et T_2 (et vice et versa) en un temps qui varie entre 8 et 12 minutes.

Soit X le temps mis par la rame pour relier les deux stations lors d'un trajet

1) Quelle est la probabilité que la rame effectue le trajet en moins de 9 minutes 30 secondes ?
2) Quelle est la probabilité que la rame effectue le trajet en plus de 11 minutes ?
3) Supposons que la rame quitte la station T_1 à 9 heures et qu'un passager se rende à la station T_2 à 9h11.
Sachant que la rame reste 1 minute en gare avant de repartir vers T_1, quelle est la probabilité qu'il rate cette rame

→ variables aléatoires continues

→ loi uniforme

→ notion d'intégrale généralisée.