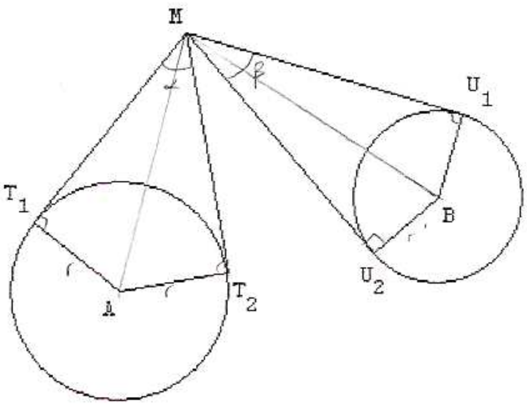
CAPES EXTERNE DE MATHEMATIQUES

Epreuve sur dossier

Thème : Géométrie,
problèmes de lieux déterminés par des conditions géométriques

1. L'exercice proposé au candidat



Soit [C] un cercle de centre A et de rayon r et [C'] un cercle de centre B de rayon r'. On suppose [C] et [C'] extérieurs l'un à l'autre.
D'un point M extérieur aux deux cercles, on mène les tangentes (MT_1) et (MT_2) à [C'] et (MU_1) et (MU_2) à [C'].
On note $\alpha = \widehat{T_1MT_2}$ et $\beta = \widehat{U_1MU_2}$.
On se propose de rechercher l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\alpha = \beta$.

1. Démontrer que M appartient à (E) si et seulement si $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{r}{r'}$.
2. Déterminer et construire l'ensemble (E).

2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1) Dégager les connaissances et les méthodes requises pour la résolution de cet exercice.

Q2) Proposer un énoncé de l'exercice de niveau Première S.

Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q2).
- L'énoncé d'un exercice de recherche de lieu déterminé par des conditions géométriques et utilisant des lignes de niveaux.

Thème : Géométrie,
problèmes de lieux déterminés par des conditions géométriques

1) L'exercice proposé au candidat

$E = \{ M \text{ du plan } / \widehat{T_1 M T_2} = \widehat{U_1 M U_2} \}$

1) · si $M \in E$ ie $\alpha = \beta$:

$d(A,(MT_1)) = AT_1 = AT_2 = d(A,(MT_2))$

$\Leftrightarrow$ A appartient à la bissectrice de α

d'où $\widehat{T_1 M A} = \alpha/2$ et donc $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{T_1 A}{MA} = \frac{r}{MA}$

de même $\widehat{U_2 M B} = \frac{\beta}{2}$ et donc $\sin\left(\beta/2\right) = \frac{U_2 B}{MB} = \frac{r'}{MB}$

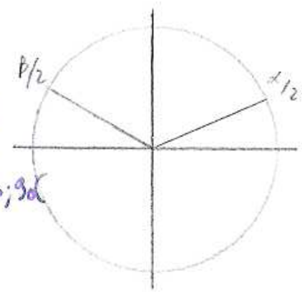
donc si $\alpha = \beta$ alors $\frac{r}{MA} = \frac{r'}{MB} \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{r}{r'}$.

· si $\frac{MA}{MB} = \frac{r}{r'}$:

alors $\frac{r}{MA} = \frac{r'}{MB} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\beta/2\right)$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = \beta/2$ car $\frac{\alpha}{2}, \beta/2 \in]0;90[$

$\Leftrightarrow \alpha = \beta$ ie $M \in (E)$.



2) Rappel : soit $E_k = \{ M \in P / \frac{MA}{MB} = k \}$

1) si $k < 0$, $E_k = \emptyset$

2) si $k = 0$, $E_k = \{A\}$

3) si $k > 0$: · si $k = 1$, E_1 est la médiatrice de $[AB]$

· si $k \neq 1$, E_k est le cercle diamètre $[IJ]$

où $I = bar\{(A,1);(B,k)\}$

$J = bar\{(A,1);(B,-k)\}$

Dans notre cas : on exclut donc le cas $k < 0$ et $k = 0 \Leftrightarrow r = 0$

· si $r = r'$, E est la médiatrice de $[AB]$

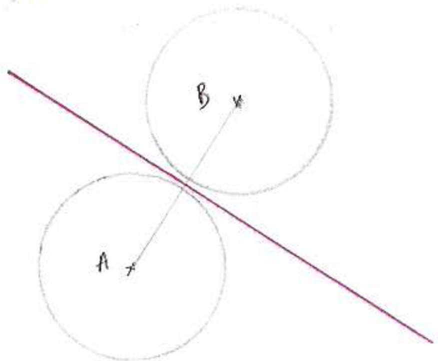
· si $r \neq r'$, E est le cercle de diamètre $[IJ]$ où

$I = bar\{(A,1);(B,r/r')\}$

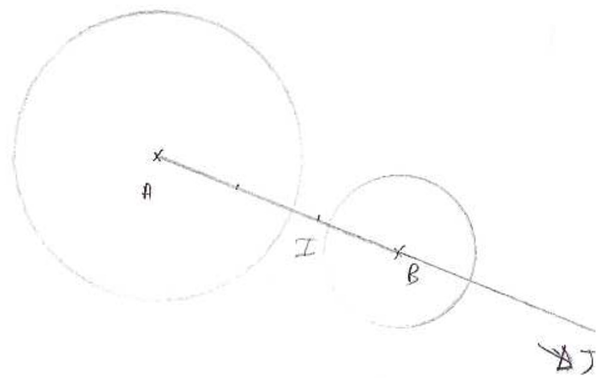
$J = bar\{(A,1);(B,-r/r')\}$

Illustration :

· si $r = r'$



· si $r \neq r'$ exemple avec $\frac{r}{r'} = 2 \Leftrightarrow r = 2r'$



2) Le travail demandé au candidat.

Q1) C. L'ensemble des points équidistants de deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est constitué des bissectrices de ces deux droites.

C. • si deux angles α et β sont compris entre 0 et 90° alors "$\sin\alpha = \sin\beta \underset{\Delta}{\Rightarrow} \alpha = \beta$".

C. • Rappel énoncé en 2

M • disjonction de cas

M • Construction du barycentre de 2 points

Q2) cf fiche jury ⟶ Calculatrice.

Exercice supplémentaire: cf fiche jury.

→ ligne de niveau $MA^2 + MB^2 = k$

→ produit scalaire (relation de Chasles) → puissance point/cercle

Connaissant l'ensemble décrit par ~~E~~ un élément variable, on recherche l'ensemble décrit par un autre point variable lié au premier élément

Phase 1 : conjecturer que le lieu $\mathcal{E}$ est égal à un ensemble $\mathcal{F}$

Phase : démontrer que le lieu est bien le lieu conjecturé

FICHE DU JURY

Q2) Enoncé niveau première S :

1) Démontrer que (MA) est une bissectrice de $\widehat{T_1MT_2}$ et que (MB) est une bissectrice de $\widehat{U_1MU_2}$.

2) a) Montrer que $MA = r \times \sin(\alpha/2)$
De même que vaut MB ?

b) en déduire que si $M \in (E)$ alors $\frac{MA}{MB} = \frac{r}{r'}$

c) Réciproquement justifier que si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$ alors $\alpha = \beta$.

3) a) que représente l'ensemble des points M du plan tels que $MA = MB$?

b). si $k \neq 1$, montrer que $\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow (\vec{MA} + k\vec{MB})(\vec{MA} - k\vec{MB}) = 0$

. En déduire que M appartient au cercle de diamètre $[IJ]$
où $I = Bar\{(A,1),(B,k)\}$
$J = Bar\{(A,1),(B,-k)\}$

4) Construire (E) dans le cas où $k = 1$ et $k = 2$.

Problème de lieu déterminé par des conditions géométriques et utilisant des lignes de niveaux :

Partie A : Résultats préliminaires

1) Soient A et B deux points distincts du plan et k un réel strictement positif.
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = k$

2) (C) est un cercle de centre O et de rayon r et M est un point quelconque du plan. On considère une droite (d) passant par M et qui coupe (C) en deux points A et B.
Démontrer que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = OM^2 - r^2$

Partie B : Application à la recherche d'un lieu géométrique

On considère un cercle (C) de centre O et de rayon r et A un point intérieur au cercle C distinct du point O.
Déterminer le lieu géométrique du projeté orthogonal du point A sur la droite (PQ) lorsque P et Q décrivent le cercle (C) de telle façon que les droites (AP) et (AQ) soient perpendiculaires.