CAPES EXTERNE DE MATHEMATIQUES

Epreuve sur dossier

Thème : Géométrie, problème d'incidence, d'alignement

1. L'exercice proposé au candidat

Soit ABCD un carré. Soient E et F les points tels que DCE soit un triangle équilatéral intérieur au carré ABCD et BCF un triangle équilatéral extérieur à ABCD.

1. Démontrer que le triangle EFC est rectangle isocèle.
2. À l'aide de considérations angulaires démontrer que A, E et F sont alignés.

2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1) Dégager les savoirs et savoir-faire mis en jeu, et préciser le(s) niveau(s) au(x)quel(x) s'adresse cet énoncé.

Q2) Rédiger des questions intermédiaires permettant de guider un élève dans la résolution de la deuxième question.

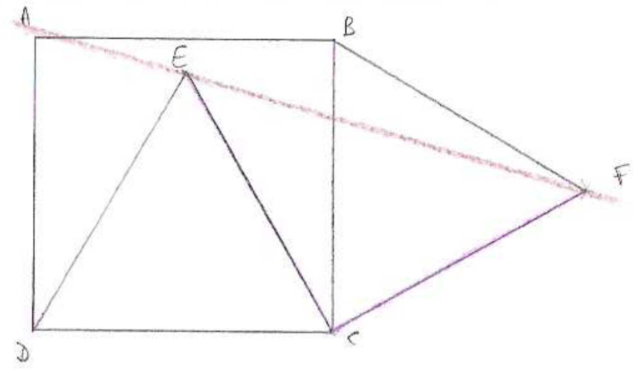
Q3) Proposer deux autres démonstrations de l'alignement des points A, E et F, l'une de niveau seconde, l'autre de niveau terminales S.

Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- la réponse à la question Q3.
- un ou deux exercices sur le même thème « géométrie plane, problème d'incidence, d'alignement », utilisant un outil différent de ceux déjà utilisés à la question Q2.

Thème : géométrie, problème d'incidence, d'alignement.

1) L'exercice proposé au candidat.



1) $\widehat{ECF} = \widehat{DCB} - \widehat{DCE} + \widehat{BCF}$

$= 90 - 60 + 60$

$= 90°$

donc ECF est rectangle en C.

$EC = DC = BC = CF$ donc ECF est isocèle en C.

(EDC équilatéral ; ABCD carré ; BCF équilatéral)

Bilan : le triangle EFC est rectangle isocèle en C.

2). Le triangle DAE est isocèle en D et $\widehat{ADE} = 30°$.

Ainsi $\widehat{EAD} = \widehat{AED} = 75°$

- $\widehat{DEC} = 60°$ car DEC équilatéral.
- $\widehat{FEC} = 45°$ car CEF isocèle rectangle en C.

donc $\widehat{AEF} = \widehat{AED} + \widehat{DEC} + \widehat{CEF} = 75 + 60 + 45 = 180°$ ie A, E, F alignés

2) Le travail demandé au candidat

Q1) Dans les outils de résolution, l'exercice est d'un niveau $5^{ème}/4^{ème}$.

Dans le nombre de pas hypotético-déductifs à accomplir, l'exercice est plutôt d'un niveau $3^{ème}/2^{nde}$.

Savoirs : - définition et propriétés du carré.
- définition et propriétés des triangles isocèles
- définition et propriétés des triangles équilatéraux.

Savoirs faires : - pour calculer un angle, on l'écrit comme somme / différence d'angles connus.
- pour montrer que trois points sont alignés, on montre que l'angle formé par ces trois points est plat.

Q2) 1) a) Montrer que le triangle ADE est isocèle en D

b) Calculer $\widehat{ADE}$ et en déduire $\widehat{AED}$

2) Combien vaut $\widehat{DEC}$

3) Sachant que ECF est isocèle rectangle en C, que vaut $\widehat{CEF}$

4) En écrivant $\widehat{AEF}$ comme somme de trois angles, montrer que A, E, F sont alignés.

Q3) Niveau seconde : transformations

On oriente le plan dans le sens direct et on considère la rotation de centre C et d'angle 60°, qu'on note r.

$r :$
$F \longrightarrow B$
$E \longrightarrow D$
$A \longmapsto A'$

or CAA' est équilatéral, donc A' appartient à la médiatrice de [AC], c'est à dire (BD). Ainsi B, D, A' alignés ⇒ A, E, F alignés.

Niveau terminale : complexes.

On considère le repère $(D, \vec{DC}, \vec{DA})$ et on note en minuscules les affixes des points en majuscule.

on a donc $d = 0$

$c = 1$

$b = 1 + i$

$a = i$

$e = 1/2 + i\sqrt{3}/2$

$f = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

$(\vec{EA}, \vec{EF}) = \arg\left(\frac{f-e}{a-e}\right)$

or $\frac{f-e}{a-e} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i}{-\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i} = -1 - \sqrt{3}$

donc $\arg\left(\frac{f-e}{a-e}\right) = \pi$ d'où A, E, F alignés.

Remarque : par cette méthode, on peut aussi montrer que ECF est isocèle rectangle en C.

on a $\frac{e-c}{f-c} = \frac{e^{i2\pi/3}}{e^{i\pi/6}} = e^{i\pi/2}$

donc $|e-c| = |f-c|$ ie ECF isocèle en C

et $(\vec{CF}, \vec{CE}) = \arg\left(\frac{e-c}{f-c}\right) = \frac{\pi}{2}$ ie ECF est rectangle en C.

Exercice supplémentaire : Barycentres.

ABC est un triangle quelconque.
On note K le pied de la hauteur issue de A.
Soit $M \in [BA]$.

On inscrit le rectangle $MNPQ$ dans le triangle de telle sorte que $N \in [AC]$, Q et P appartiennent à (BC). on note O son centre.
On note J le milieu de $[AK]$ et I celui de $[BC]$.
On se propose de démontrer que I, O et J sont alignés.

1) Justifier qu'il existe deux réels α et β dont la somme est non nulle tels que M soit le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$

2) En déduire que :

- N est le barycentre de $\{(A,\alpha);(C,\beta)\}$
- P est le barycentre de $\{(K,\alpha);(C,\beta)\}$
- Q est le barycentre de $\{(K,\alpha);(B,\beta)\}$

3) Conclure.