CAPES EXTERNE DE MATHEMATIQUES

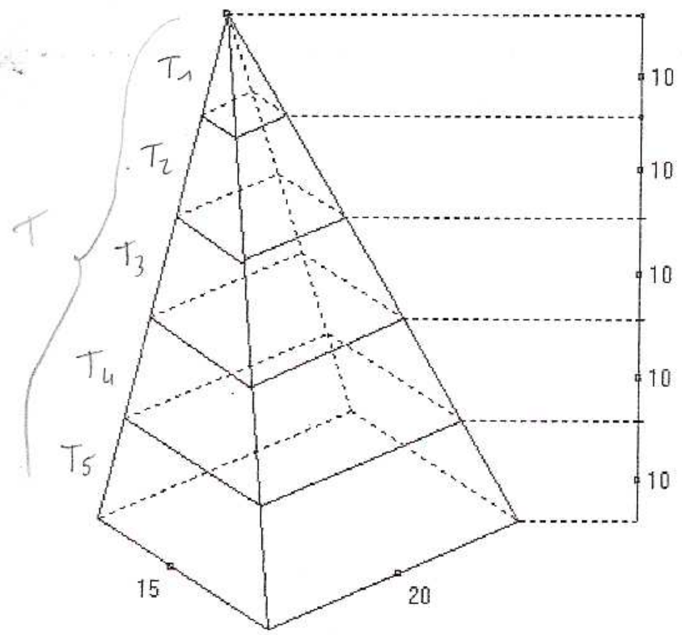
Epreuve sur dossier

Thème :
Géométrie dans l'espace, calculs de grandeurs

1. L'exercice proposé au candidat

Le morceau de chocolat représenté ci-contre a la forme d'une pyramide à base rectangulaire et pèse 2 kg.
Il est découpé en cinq tranches de même hauteur.
Combien pèse chacune des tranches ?

(les dimensions indiquées sur le schéma sont exprimées en centimètre)



2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1) Proposer un énoncé permettant l'étude de cette situation à l'aide des connaissances et des méthodes exigibles au collège.

Q2) Rédiger l'énoncé d'un exercice permettant, en Terminale S, de retrouver des formules de volumes vues au collège.

Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q2)
- Les énoncés d'un ou deux exercices menant à des calculs de longueurs et d'angles dans l'espace avec les compétences exigibles au collège.

Thème : géométrie dans l'espace, calculs de grandeurs

1) L'exercice proposé au candidat

on suppose les distances données en centimètres.

on note T le morceau de chocolat

T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 les tranches de haut en bas.

$V_T = \frac{1}{3} \times 15 \times 20 \times 50 = 5000\ cm^3$.

$V_{T_5} = 5000 - \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5} \times 20 \times \frac{4}{5} \times 15\right) \times 40 = 2440\ cm^3$.

$V_{T_4} = 2560 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5} \times 20 \times \frac{3}{5} \times 15\right) \times 30 = 1480\ cm^3$

$V_{T_3} = 1080 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} \times 20 \times \frac{2}{5} \times 15\right) \times 20 = 760\ cm^3$

$V_{T_2} = 320 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} \times 20 \times \frac{1}{5} \times 15\right) \times 10 = 280\ cm^3$

$V_{T_1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} \times 20 \times \frac{1}{5} \times 15\right) \times 10 = 40\ cm^3$

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T
Volume (cm^3)	40	280	760	1480	2440	5000
Poids (g)	16	112	304	592	976	2000

2) Le travail demandé au candidat

Q1) 1) Calculer le volume de T

2) a) Déterminer par Thalès les dimensions de la base de la pyramide formée par T_1, T_2, T_3 et T_4

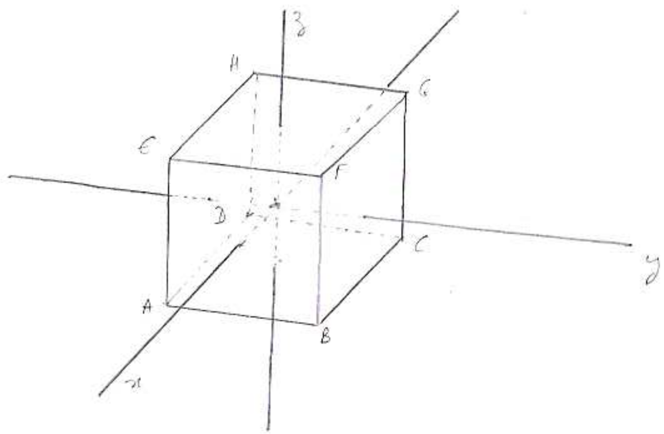
b) Déterminer le volume de la pyramide formée par T_1, T_2, T_3 et T_4.

c) En déduire le volume de la tranche T_5

3) Réitérer le procédé pour calculer les volumes de T_1, T_2, T_3, T_4.

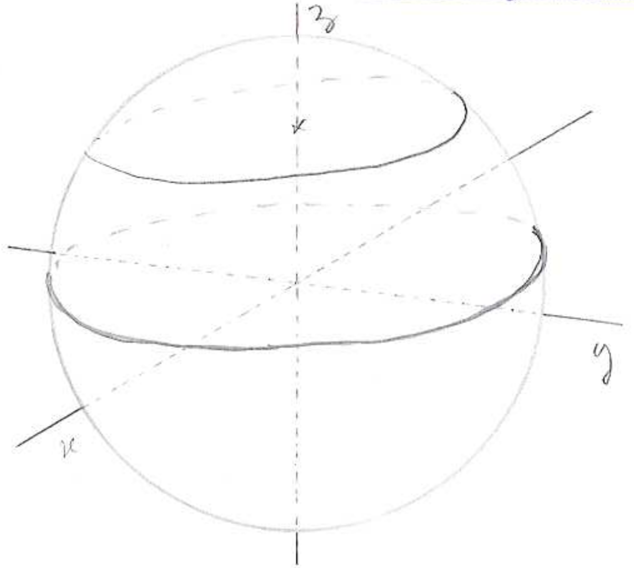
4) En remarquant que le poids est proportionnel au volume, déduisez-en les poids de T_1, T_2, T_3, T_4, T_5

Q2) Volume d'un cube de côté 2 cm :



$\int_{-1}^{1} 4\, dz = 8\ cm^2$

Volume d'une sphère de rayon 2cm:



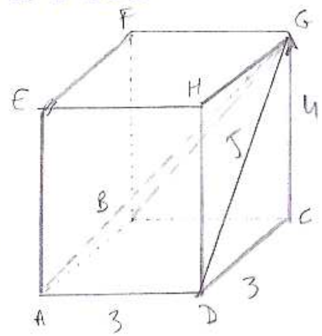
$$z = f(y) = \sqrt{4-y^2}$$
$$\Longleftrightarrow \quad y = \sqrt{4-z^2}$$
$$V = \int_{-2}^{2} \pi\,(4-z^2)\,dz$$
$$= \frac{32}{3}\pi$$

Volume de la pyramide de notre exercice:

$$\int_0^{50} \frac{2}{5}x \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}x \, dx = \int_0^{50} \frac{3}{25} x^2 \, dx$$
$$= \frac{1}{25}\left[x^3\right]_0^{50} = 5000$$

Exercices supplémentaires:

Exercice 1:



ABCDEFGH est un pavé droit.

On donne : AD = DC = 3cm ; GC = 4cm ; GD = 5cm

Sur le dessin ci-contre, les dimensions ne sont pas respectées.

1) Calculer le volume exprimé en cm³, de la pyramide GABCD.

2) a) Dessiner en vraie grandeur le triangle ADG rectangle en D.
 b) Calculer la mesure arrondie au degré, de l'angle $\widehat{AGD}$ du triangle ADG
 c) Calculer ~~la valeur~~ exacte ~~de la~~ longueur AG, puis en donner la valeur arrondie au millimètre.

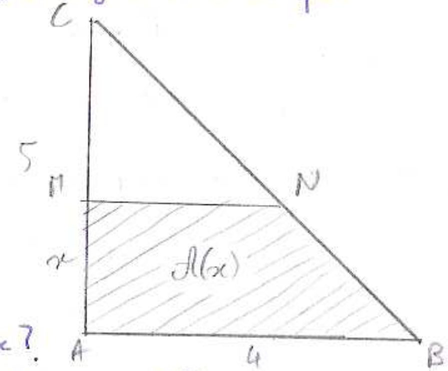
Exercice 2: L'unité de longueur est le mètre.

Première partie: Soit un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 4, AC = 5.

Soit M un point de [AC].

On pose AM = x.

La parallèle à (AB) passant par M coupe le segment [BC] en N.



1- a) Entre quelles valeurs peut varier x ? Quelle est, en fonction de x, la longueur CM ?
 b) Démontrez que : MN = 4 − 0,8x

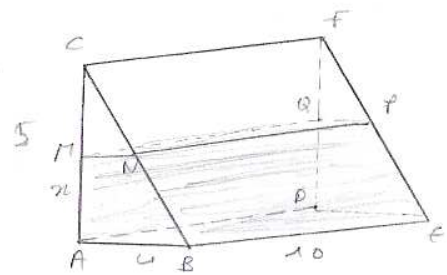
2 - Calculer, en fonction de x, l'aire A(x) du trapèze ABNM

Deuxième partie:

Le schéma ci-contre représente une citerne posée sur un sol horizontal.

Elle a la forme d'un prisme droit ABCDEF:

- sa base ABC est le triangle décrit dans la première partie
- BE = 10.



1) Quel est, en mètres cubes, le volume de la citerne ?

2) La citerne contient de l'eau jusqu'au niveau du plan MNPQ. x désignant la longueur AM, démontrer que le volume V(x) est égal à 4x (10 − x)

3) Calculer le volume d'eau contenue dans la citerne lorsqu'elle est remplie à mi-hauteur.

4) a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant:

x	1	1,4	1,5	1,6	2
$V(x) = 4x(10-x)$					

 b) En déduire un encadrement à 0,1 près de la hauteur d'eau lorsque la citerne est remplie à la moitié de sa capacité.