CAPES EXTERNE DE MATHEMATIQUES

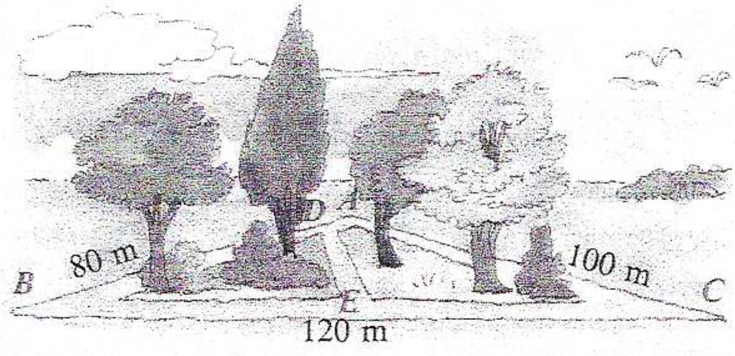
Epreuve sur dossier

Thème : Géométrie plane,
Calcul de grandeurs

1. L'exercice proposé au candidat

(d'après Jeux et stratégies n° 13)

Dans le petit village où j'ai passé mes dernières vacances, il y a un jardin de forme triangulaire, traversé par une allée. Les longueurs des côtés sont respectivement 80, 100 et 120 m. L'allée qui relie les côtés [AB] et [BC] partage le jardin en deux parties d'aires égales. De plus, les longueurs des périmètres des deux zones ainsi délimitées sont également identiques.
À quelles distances de B sont situées les extrémités D et E de l'allée ? Quelle est sa longueur ?



2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

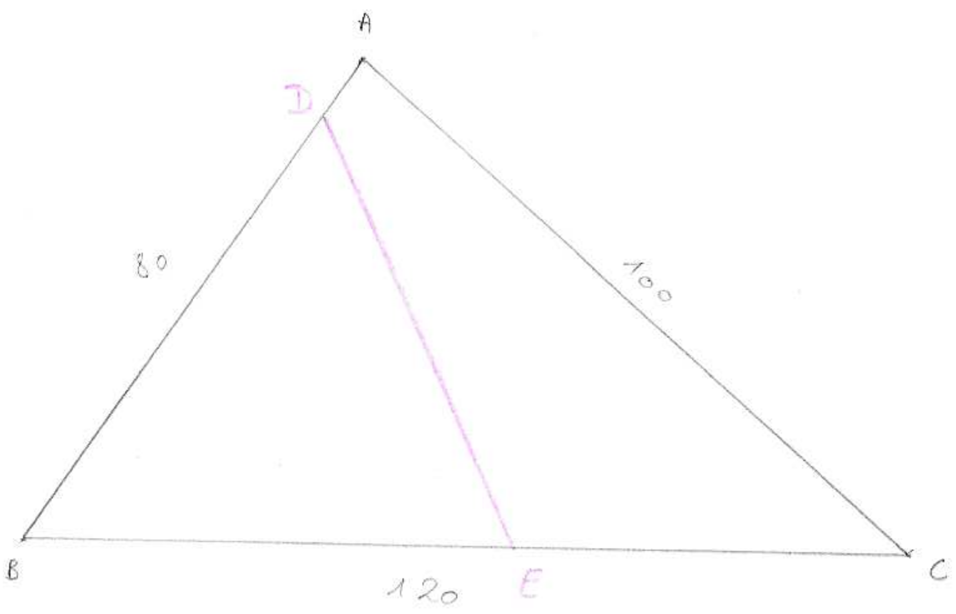
Q1) Indiquer les connaissances utilisées dans la résolution de cet exercice.
Q2) Proposer une démonstration, à l'attention d'élèves de Première S, des relations métriques utilisées pour cette résolution.
Q3) Ecrire un énoncé détaillé de l'exercice à l'attention d'élèves de Première S

Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q3)
- l'énoncé de deux autres exercices utilisant les relations métriques dans le triangle pour calculer ou comparer des grandeurs

Thème : géométrie plane, calcul de grandeurs

1) L'exercice proposé au candidat



on a : $BD + \cancel{DE} + EB = AD + \cancel{DE} + EC + CA$

$\iff 2(BD+EB) = AD + EC + CA + BD + EB$

$\iff 2(BD+EB) = 300$

$\iff BD + EB = 150$.

De plus, $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} BA \times BC \times \sin\hat{B}$

or $\sin\hat{B} = \sqrt{1-\cos^2\hat{B}}$

et $\cos\hat{B} = \dfrac{BC^2+AB^2-AC^2}{2BC \times AB} = \dfrac{9}{16}$

On trouve donc $\mathcal{A}_{ABC} = 1500\sqrt{7}$.

Donc $\mathcal{A}_{BDE} = 750\sqrt{7} = \frac{1}{2} \times DB \times BE \times \sin\hat{B}$

$= \frac{1}{2} \times BE \times (150 - BE) \times \frac{5\sqrt{7}}{16}$

On trouve donc $\boxed{\begin{array}{l} BE = 5(\sqrt{33}+15) \simeq 103,72 \text{ m} \\ DB = 75 - 5\sqrt{33} \simeq 46,28 \text{ m} \end{array}}$

BE et DB jouent un rôle symétrique, mais les conditions de l'exercice expliquent ce résultat

Enfin on trouve $DE^2 = BE^2 + DB^2 - 2BE \times DB \times \cos\widehat{DBE}$

$= 7500$

Donc $\boxed{DE = \sqrt{7500} \simeq 86,60 \text{ m}}$

2) Le travail demandé au candidat

Q1) . Définition du périmètre

- Définition de l'aire
- Formule de l'aire d'un triangle en fct du sinus (cf Q2)
- Formule d'Al-Khashi (cf Q2)
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- résolution d'un système

Q2) On considère ABC un triangle non plat

on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$

H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues de A, B, C.

- Formule d'Al-Kashi : Dans le triangle ABC, on a :

$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$ $\quad b^2 = a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$ $\quad c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$

preuve : $a^2 = BC^2$

$= (\vec{AC} - \vec{AB})^2$

$= AC^2 - 2\vec{AC}\cdot\vec{AB} + AB^2$

$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

les autres cas sont symétriques.

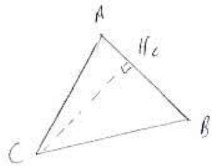
- **Aire d'un triangle :** Dans le triangle ABC, on a :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$$

Preuve : on sait que $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} CH_c \times AB$

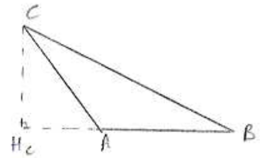
→ 1er cas : ABC est acutangle ($H_c \in [AB]$)

$$CH_c = CA \times \sin \hat{A}$$



→ 2ème cas : ABC est obtusangle ($H_c \notin [AB]$)

$$CH_c = AC \times \sin(\pi - \hat{A})$$
$$= AC \times \sin \hat{A}$$



Bilan : $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A}$

et les autres cas sont symétriques.

- **$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$**

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

en prenant $a = b = x$, on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = \cos 0 = 1$.

Q3) 1) En utilisant l'égalité des périmètres, montrer que $BE + DB = 150$

2) Exprimer $\cos \hat{B}$ en utilisant la formule d'Al-Kashi

3) En utilisant la formule de l'aire en fonction du sinus, calculer $\mathcal{A}_{ABC}$

4) Montrer que $\mathcal{A}_{BDE} = \frac{1}{2} \times BE \times (150 - BE) \times \sin \widehat{DBE}$.

5) En déduire BE et DB

6) En utilisant à nouveau la formule d'Al-Kashi dans BDE, calculer DE.

Exercice supplémentaire :

La Formule de Héron.

Soit ABC un triangle, a, b et c les longueurs respectives des côtés $[BC]$, $[AC]$, $[BA]$, S l'aire du triangle et p son demi-périmètre.

On se propose de démontrer la formule de Héron :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

1. a) Démontrer que $S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$

b) Exprimer $\cos \hat{C}$ en fonction de a, b, et c

c) En remarquant que $\cos^2 \hat{C} + \sin^2 \hat{C} = 1$, exprimer $16S^2$ sous la forme d'un produit de quatre facteurs

d) En déduire la formule de Héron.

2) Applications

a) Calculer l'aire l'aire d'un triangle dont les longueurs des côtés sont 13, 14, 15

b) Trouver des triangles dont les longueurs des côtés et l'aire sont des entiers.