

CAPES EXTERNE DE MATHÉMATIQUES

Epreuve sur dossier

Thème : Analyse, étude de fonctions

1. L'exercice proposé au candidat

Soit f la fonction définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x)$ et C sa courbe représentative dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1. Étudiez les variations de f et précisez ses limites aux bornes de I .
2. On note D la représentation graphique de la fonction d définie par $d(x) = x$ et P la représentation graphique de la fonction p définie par $p(x) = x^2$. Étudiez les positions relatives de C , D et P .
3. Soit A le point de C d'abscisse 1. Donnez une équation de la tangente T à C en A . Étudiez la position relative de C et T .
4. Soit M un point quelconque de C d'abscisse m . Soit T_m la tangente à C en M . Le résultat obtenu pour le point A dans la question précédente est-il encore vrai pour M ?

2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- Q1) Dégager les connaissances et les méthodes requises pour la résolution de l'exercice.
- Q2) Un résultat général non exigible en Terminale permet de résoudre la question 4. Rédiger un énoncé d'un exercice permettant de démontrer ce résultat en classe de Terminale.

Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q2).
- deux situations menant à l'étude de la position relative de deux courbes, l'une de niveau seconde et l'autre de niveau Terminale S.

Thème: Analyse,
étude de fonctions.

1) L'exercice proposé au candidat

$$f: I =]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x \ln(x).$$

1) $f'(x) = \ln(x) + 1$.

x	0	$1/e$	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
f	0	$\searrow -1/e$	$\nearrow +\infty$

2) $d(x) = x$
 $p(x) = x^2$ avec $x \in]0; +\infty[$
 $g(x) = x \ln x$

• Positions relatives de p et f :

$$p(x) - d(x) = x^2 - x = x(x-1)$$

donc $p(x) - d(x) \leq 0$ si $x \in]0; 1[$

$$p(x) - d(x) > 0$$
 si $x \in]1; +\infty[$

donc p au dessus de D sur $]0; 1[$

p au dessus de D sur $]1; +\infty[$

• Positions relatives de D et C :

$$f(x) - d(x) = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$$

donc $f(x) - d(x) \leq 0$ si $x \in]0; e]$

$$f(x) - d(x) > 0$$
 si $x \in]e; +\infty[$

donc C au dessus de D sur $]0; e]$

C au dessus de D sur $]e; +\infty[$

• Positions relatives de C et p :

$$f(x) - p(x) = x \ln x - x^2 = x(\ln x - x)$$

soit $g: x \mapsto \ln x - x$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	—
g	$-\infty$	$\nearrow -1$	$\searrow -\infty$

Ainsi $f(x) - p(x) \leq 0$ avec $x \in]0; +\infty[$

Donc C en dessous de p sur $]0; +\infty[$

3) (T): $y = f'(1)(x-1) + f(1)$
 $\Leftrightarrow y = x - 1$

$$f(x) - (x-1) = x \ln x - x + 1 =: h(x)$$

$$h'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	—	0	+
h	1	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$

Donc C est au dessus de T

4) (T_m): $y = f'(m)(x-m) + f(m)$

$$h_m(x) = f(x) - f'(m)(x-m) - f(m)$$

$$h'_m(x) = f'(x) - f'(m)$$

$$= \ln(x) + 1 - \ln(m) - 1$$

$$= \ln(x/m)$$

x	0	m	$+\infty$
$h'_m(x)$	—	0	+
h_m	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Donc C est au dessus de T_m .

2) Le travail demandé au candidat

- Q1) - fonction du
- dérivation
- tableau de variation
- lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction.
- pour étudier la position relative de deux courbes, on étudie le signe de la différence des fonctions correspondantes
- pour montrer qu'une fonction est ≥ 0 , on montre que sa valeur minimale est ≥ 0

Q2) On va montrer le résultat suivant:

Toute fonction deux fois dérivable dont la dérivée seconde est positive est sans ses tangentes:

preuve: soit f une fonction deux fois dérivable de I dans $\mathbb{R}$

soit $x_0 \in I$. La tangente T à C (courbe représentative de f) en x_0 a pour équation: $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

on veut montrer que $\forall x \in I \quad f(x) - T(x) \geq 0$
 $(f(x) - T(x))' = f'(x) - T'(x) = f'(x) - f'(x_0)$

or f'' est positive donc f' est croissante ainsi:

Bilan: $\forall x \quad f(x) \geq T(x)$
 ie C au dessus de T .

x	x_0
$f(x) - T(x)$	0
$f - T$	$\searrow 0$

Exercices supplémentaires:

Exercice 1: Niveau seconde

Deux fournisseurs d'accès à Internet proposent les tarifs suivants:

- A demande 15 € d'abonnement mensuel, les 10 premières heures de connexion sont gratuites, le temps supplémentaire est facturé 1,5 € l'heure.
- B demande 10,5 € d'abonnement mensuel, les 15 premières heures de connexion sont gratuites, le temps supplémentaire est facturé 3 € l'heure.

- 1) Donner pour un temps de connexion de x en heures le prix mensuel d'un accès par l'intermédiaire de chacun des deux fournisseurs. On le notera $f(x)$ pour A et $g(x)$ pour B.
- 2) Représenter graphiquement les deux fonctions f et g dans le même repère.
- 3) Quel est le temps de connexion au dessus duquel le prix du fournisseur B est le plus avantageux?

Exercice 2: Niveau terminale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = (\sin x)(\cos x + 1)$

- 1) Justifier que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0; \pi]$
- 2) Etudier les variations de f , dresser le tableau de variations de f pour $x \in [0; \pi]$.
- 3) Construire la courbe C représentant f sur $[0; \pi]$.
- a) On appelle T la tangente à C au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de T .
- 5) Le but de cette question est de préciser la position de C par rapport à T .

On détermine par g la fonction affine représentée par T et par d la fonction définie par $d(x) = f(x) - g(x)$

- a) Etudier les variations de d sur $[0; \pi]$.
- b) En déduire le signe de $d(x)$ sur $[0; \pi]$, puis la position de C par rapport à T lorsque $x \in [0; \pi]$.
- c) Que peut-on dire de la position de C par rapport à T lorsque $x \in (-\pi; \pi)$? Justifier la réponse.