CAPES EXTERNE DE MATHEMATIQUES

Epreuve sur dossier

Thème : Analyse, recherche d'extremums et optimisation

1. L'exercice proposé au candidat

Partie A :

Montrer que quels que soient les réels $b > 0$ et $c > 0$ on a : $\dfrac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$.

Pour quelles valeurs de b et c a-t-on égalité ?

Partie B :

On veut montrer que quels que soient les réels $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$, $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ [1]

1. Vérifier que le problème équivaut à démontrer que pour tous réels strictement positifs a,b et c $\dfrac{(a+b+c)^3}{abc} \geq 27$
2. b et c désignant des réels strictement positifs, on considère la fonction f définie sur $]\,0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{(x+b+c)^3}{xbc}$.

   a) Montrer que cette fonction a un minimum pour $x = \dfrac{b+c}{2}$ et que ce minimum est $\dfrac{27}{4}\dfrac{(b+c)^2}{bc}$.

   b) En utilisant la partie A, en déduire que [1] est vraie.

Partie C :

1. Démontrer que la somme des longueurs des arêtes d'un pavé droit est supérieure ou égale à la somme des longueurs des arêtes du cube de même volume.
2. Dans quel(s) cas a-t-on égalité de ces sommes de longueurs ?

2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1) Indiquer les différents types de raisonnements et outils utilisés pour la résolution de l'exercice.

Q2) L'inégalité [1] est équivalente à $\ln(\dfrac{a+b+c}{3}) \geq \dfrac{1}{3}(\ln a + \ln b + \ln c)$ [2]. Rédiger un exercice, de niveau Terminale S permettant de démontrer que la courbe de la fonction logarithme népérien est située en dessous de toutes ses tangentes puis utilisant ce résultat pour démontrer l'inégalité [2].

Avec des connaissances post-bac, comment pourrait-on justifier cette dernière inégalité ?

Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q2).
- L'énoncé d'un exercice utilisant les propriétés des fonctions pour résoudre des problèmes d'optimisation.

Thème : Analyse, recherche d'extremums et optimisation

1) L'exercice proposé au candidat

Partie A : $\dfrac{b+c}{2} - \sqrt{bc} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2 \geqslant 0$

donc $\forall\, b > 0$ et $c > 0$ $\quad \dfrac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc}$

on a égalité si et seulement si $b = c$

Partie B :

1) $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(a+b+c)^3}{27} \geqslant abc$ car $x \longmapsto x^3$ est croissante

$\Leftrightarrow \dfrac{(a+b+c)^3}{abc} \geqslant 27$ car $a > 0,\ b > 0,\ c > 0 \Rightarrow abc > 0$.

2) $f(x) = \dfrac{(x+b+c)^3}{xbc}$

a) $f'(x) = \dfrac{3(x+b+c)^2 \times x \quad - (x+b+c)^3}{bcx^2}$

$= \dfrac{(x+b+c)^2\,(3x - x - b - c)}{bcx^2} = \dfrac{(x+b+c)^2(2x-b-c)}{bcx^2}$

$f'(x)$ est donc du signe de $2x - b - c$:

x	0		$\frac{b+c}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

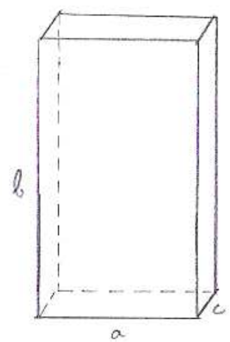
et $f\left(\dfrac{b+c}{2}\right) = \dfrac{\left(\frac{3}{2}(b+c)\right)^3}{\left(\frac{b+c}{2}\right) \times bc} = \dfrac{27}{4}\,\dfrac{(b+c)^2}{bc}$

Ainsi $f(x) \geqslant f\left(\dfrac{b+c}{2}\right) \Leftrightarrow \dfrac{(x+b+c)^3}{xbc} \geqslant \dfrac{27}{4}\,\dfrac{(b+c)^2}{bc}$

or $\underset{\text{d'après 1)}}{b + c \geqslant 2\sqrt{bc}} \Leftrightarrow (b+c)^2 \geqslant 4bc$

d'où $\dfrac{(x+b+c)^3}{xbc} \geqslant 27$ et donc on a bien l'inégalité [1].

Partie C :



Soit un pavé droit ayant
pour largeur a
pour hauteur b
pour profondeur c

Son volume vaut abc

Un cube ayant pour volume abc a des côtés de longueur $\sqrt[3]{abc}$.

la somme des arêtes d'un pavé droit vaut $a+b+c$ (on fait ça divisé par 4 pour des raisons de symétrie)
la somme des arêtes d'un cube vaut $3\sqrt[3]{abc}$

or $a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow$ [1] d'où le résultat.

2) on a égalité à la partie A ssi $b = c$
puis égalité à la partie B ssi $a = \dfrac{b+c}{2}$

Bilan : on a égalité ssi $a = b = c$

2) Le travail demandé au candidat

Q1) <u>les différents types de raisonnements</u> :

- par équivalences
- par implications

<u>les outils utilisés</u> :

- égalités remarquables
- propriétés des fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$
- étude de fonction
- calcul de dérivée
- tableau de variations

Q2) 1) Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de "$x \mapsto \ln x$" en un point x_0.

$$y = \frac{1}{x_0}(x - x_0) + \ln(x_0)$$

2) a) En remarquant que $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow t \geq x_0$ pour t et x_0 non nuls, vérifier que :

"$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\ln x \leq \frac{1}{x_0}(x - x_0) + \ln(x_0)$"

b) En déduire que la courbe de "ln" est en dessous de ses tangentes.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}\, dt \leq \int_{x_0}^{x} \frac{1}{x_0}\, dt \Leftrightarrow \ln(x) - \ln(x_0) \leq \frac{1}{x_0}(x - x_0)$

Avec des connaissances post-bac, il suffit de remarquer que "ln" est concave et d'utiliser l'inégalité de Jensen :

Etant données une fonction f concave sur I et une famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ de réels positifs telle que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, on a :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in I^p,\ f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$$

<u>Exercice supplémentaire</u> :

4/7/2006

1) Pour tout réel α de $]0;2[$, on considère la fonction

$$x \mapsto g_\alpha(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - (x + \alpha)^2}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_\alpha$ de g_α. Montrer que la courbe représentative de g_α possède un axe de symétrie vertical.

b) Montrer que pour tout x de $\mathcal{D}_\alpha$, on a $g_\alpha''(x) < 0$. En déduire que g_α admet un unique maximum en $x_0 = -\alpha/2$

2) En utilisant g_α, montrer que l'aire maximale d'un trapèze de hauteur α (avec $0 < \alpha < 2$) inscrit dans un cercle de rayon 1 est égale à $\alpha\sqrt{4 - \alpha^2}$ (en unités d'aire