# CAPES EXTERNE DE MATHEMATIQUES

## Epreuve sur dossier

**Thème :** Équations, inéquations du premier et du second degré à une inconnue

## 1. L'exercice proposé au candidat

Extrait de l'article *Comment ça s'écrit ?*, d'Hélène Di Martino dans la revue *Petit x* n° 59.

Un cycliste se rend d'une ville A à une ville B. Il effectue le trajet aller à la vitesse moyenne de 20 $km.h^{-1}$.
Quelle doit être sa vitesse moyenne au retour pour que sa vitesse moyenne sur tout le trajet aller-retour soit de 45 $km.h^{-1}$ ?

## 2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury.

***Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :***

Q1) Proposer un énoncé de niveau fin de collège permettant à un élève de résoudre cet exercice, et repérer les connaissances et méthodes requises pour cette résolution.

Q2) À partir de la situation présentée dans l'exercice du jury, proposer l'énoncé d'un exercice mettant en jeu des connaissances et compétences concernant l'étude des fonctions exigibles en Première S

***Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :***

- sa réponse à la question Q2).
- les énoncés d'un ou deux exercices sur le thème «Équations, inéquations du premier et second degré à une inconnue ».

Thème : Equations, Inéquations du premier et du second degré à une inconnue.

## 1) L'exercice proposé au candidat

Soit $d$ la distance entre la ville A et la ville B
$t_1$ la durée de l'aller
$t_2$ la durée du retour

$v_1 = d/t_1$ où $v_1$ est la vitesse de l'aller

$v_2 = d/t_2$ où $v_2$ est la vitesse du retour

$v = \dfrac{2d}{t_1+t_2}$ où $v$ est la vitesse moyenne sur le parcours

on a $v_1 = 20$ et $v = 45$. Donc $\dfrac{9}{4} v_1 = v$

$\Leftrightarrow \dfrac{9}{4}\dfrac{d}{t_1} = \dfrac{2d}{t_1+t_2} \Leftrightarrow \dfrac{t_1+t_2}{8} = \dfrac{t_1}{9} \Leftrightarrow \dfrac{1}{72} t_1 = -\dfrac{1}{8} t_2$

on trouve des temps de signe opposé $\rightarrow$ IMPOSSIBLE.

POURQUOI ?

on a $v = \dfrac{2d}{t_1+t_2} = \dfrac{2}{\frac{t_1+t_2}{d}} = \dfrac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}} = \dfrac{2 v_1 v_2}{v_1+v_2}$

Supposons $v_1$ fixée. Et considérons $x = v_2$ comme variable et étudions la vitesse moyenne en fonction de $x$ :

$v(x) = \dfrac{2 v_1 x}{v_1 + x}$

$v$ est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et $v'(x) = \dfrac{2 v_1^2}{(x+v_1)^2} > 0$

Ainsi $v$ est croissante

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $v$ | $0$ | $\nearrow 2v_1$ |

$\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 v_1}{\frac{v_1}{x} + 1} = 2v_1$

Ainsi, sur un aller-retour, on ne peut pas doubler (ou plus) la vitesse d'aller en vitesse moyenne.

## 1) Le travail demandé au candidat

Q1) 1) Exprimer $v_1$ en fonction de $d$ et $t_1$
$v_2$ en fonction de $d$ et $t_2$
$v$ en fonction de $d$, $t_1$ et $t_2$.

2) vérifier que $\dfrac{9}{4} v_1 = v$

3) En remplaçant $v_1$ et $v$ par les expressions trouvées en 1) dans l'équation précédente, montrer que $\dfrac{1}{72} t_1 = -\dfrac{1}{8} t_2$

4) En déduire que c'est impossible.

### Connaissances et méthodes :

- savoir que $v = d/t$
- savoir que des vitesses, des distances, des temps sont positifs

Q2) 1) Montrer que $v = \frac{2\, v_1 v_2}{v_1\, v_2}$.

2) On suppose $v_1$ fixée et on étudie $v$ en fonction de $v_2$.
soit $v(x) = \frac{2\, v_1\, x}{v_1\, x}$ avec $x \in [0\,;+\infty[$

a) Montrer que $v$ est dérivable et calculer $v'$.

b) En déduire que $v$ est croissante et étudier ses limites aux bornes de son intervalle de définition.

3) Conclure quant à la résolution de l'exercice.

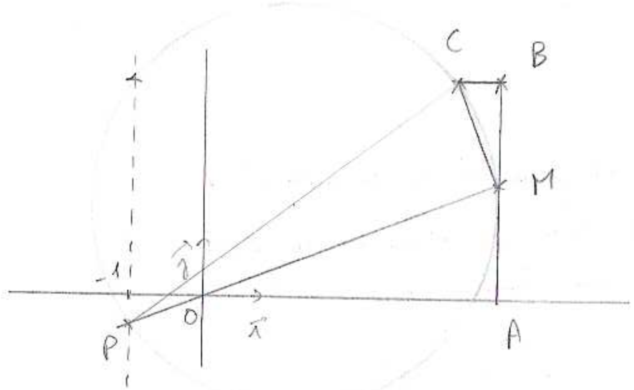
Connaissances et méthodes :

- dérivation
- lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction.
- calcul de limites

Exercices supplémentaires :

Exercice 1 : Résolution géométrique d'une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$

Soit $a$, $b$ et $c$ trois réels non nuls.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$
on considère les points A, B et C définis par :
$\vec{OA} = a\vec{i}$, $\vec{AB} = b\vec{j}$ et $\vec{BC} = -c\vec{i}$
Soit P le point de coordonnées $(-1, \alpha)$ ($\alpha$ est un réel quelconque)
la droite (OP) coupe la droite (AB) en M.




1) Démontrer que : les droites (OM) et (CM) sont perpendiculaires si et seulement si $\alpha$ est solution de : $ax^2 + bx + c = 0$
2) En déduire une construction géométrique permettant de résoudre graphiquement une équation du second degré.
3) Retrouver géométriquement la condition d'existence des solutions d'une équation du second degré.
4) Application : construire géométriquement les solutions des équations

a) $5x^2 + 8x + 3 = 0$
b) $3x^2 + 4x - 4 = 0$
c) $10x^2 - 13x - 3 = 0$
d) $4x^2 + 3x + 2 = 0$

Exercice 2 : Pour quelles valeurs de $x$ l'aire $r(x)$ du rectangle est-elle plus grande que l'aire $d(x)$ du demi-disque ?