CAPES EXTERNE DE MATHEMATIQUES

Epreuve sur dossier

Thème : Analyse, équation différentielle

1. L'exercice proposé au candidat

Une population d'insectes se développe dans un milieu où la population totale ne peut pas dépasser un certain seuil P_{max}.
Le modèle choisi pour étudier l'évolution de la population stipule que pendant un petit intervalle de temps l'accroissement de la population est proportionnel au produit de la population présente, de l'écart entre les populations présente et maximale, et de l'intervalle de temps.
Si on note $P(t)$ la population à l'instant t (l'unité de temps étant la journée) et si on considère que $P(0) = 0{,}01$, $P_{max} = 1$ (l'unité représentant 10^6 individus) et que le coefficient de proportionnalité est $\frac{1}{2}$, le modèle et ces hypothèses conduisent à l'équation différentielle : $P'(t) = \frac{1}{2}P(t)\,(1 - P(t))$ avec $P(0) = 0{,}01$ **(1)**

1. On pose $P(t) = \frac{1}{y}$; démontrer que y est solution de l'équation : $y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}$ **(2)**

2. Résoudre l'équation **(2)** puis en déduire que la solution de **(1)** est de la forme : $P(t) = \dfrac{1}{Ce^{-\frac{1}{2}t} + 1}$ où C est un réel à déterminer.

3. Etudier la fonction P : variations, signe de P'', limite en $+\infty$.
Tracer sa représentation graphique dans un repère judicieusement choisi.

4. Au bout de combien de jours la population $P(t)$ dépassera-t-elle $\frac{1}{2}$?

5. On appelle nombre moyen d'insectes la limite quand T tend vers $+\infty$ de $\frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$. Calculer cette intégrale et en déduire le nombre moyen d'insectes dans le milieu.

2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1) Justifier que P est solution de l'équation : $\frac{y'}{y} + \frac{y'}{1-y} = \frac{1}{2}$ et dégager l'intérêt de cette transformation de l'équation (1).

Q2) Utiliser la méthode d'Euler pour construire sur calculatrice une représentation graphique approchée de la fonction P. Représenter sur le même graphique la fonction P.

Q3) Indiquer l'intérêt d'étudier le signe de P''.

Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- un énoncé, pour des élèves de terminale S, conduisant à la mise en œuvre de la méthode d'Euler pour obtenir une représentation approchée de la fonction P.
- une ou deux situations issues de la géométrie, de la physique, de la biologie, de l'économie ou des probabilités, etc. , menant à une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants et à sa résolution.

Thème : Analyse, équation différentielle

1) L'exercice proposé au candidat.

1) $P'(t) = \frac{1}{2} P(t)\,(1 - P(t))$

$\Leftrightarrow -\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{y}\left(1 - \frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow -y' = \frac{1}{2}(y-1) \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$

2) Les solutions de l'équation (2) sont de la forme $y(t) = Ce^{-1/2\,t} + 1$, donc la solution de (1) est de la forme $P(t) = \dfrac{1}{Ce^{-1/2\,t} + 1}$

mais $P(0) = \dfrac{1}{C+1} = 0{,}01 \Rightarrow C = 99$

Donc $\boxed{P(t) = \dfrac{1}{99e^{-1/2\,t} + 1}}$

3) $P'(t) = \dfrac{99\,e^{-1/2\,t}}{2\,(99e^{-1/2\,t} + 1)^2} > 0$ donc P est strictement croissante.

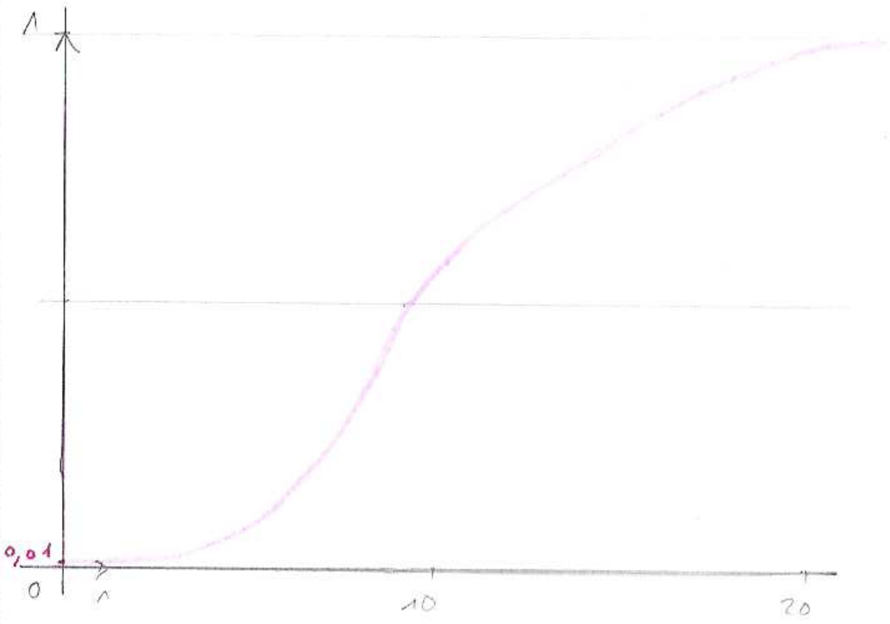
$P''(t) = \dfrac{99e^{-1/2\,t}\,[99\,e^{-1/2\,t} - 1]}{4\,(99e^{-1/2\,t} + 1)^3}$

on partir de $P' = \frac{1}{2}P(1-P)$ et dériver
on a refait un tableau de signe pour P'' dépendant de P et P'

donc P'' est du signe de $99e^{-1/2\,t} - 1$

or $99\,e^{-1/2\,t} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}t \leq \ln 99 \Leftrightarrow t \leq 2\ln 99$

et $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = 1$.



4) $P(t) \geqslant 1/2 \Leftrightarrow 2 \geqslant 99\,e^{-1/2\,t} + 1$

$\Leftrightarrow t \geqslant 2\ln 99 \simeq 9{,}2$

Donc la population $P(t)$ dépassera $1/2$ au bout de 10 jours.

5) $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T P(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{e^{t/2}}{e^{t/2} + 99}\,dt$

$= \dfrac{1}{T} \times 2\,\left[\ln(e^{t/2} + 99)\right]_0^T$

$= \dfrac{2}{T}\ln\left(\dfrac{e^{T/2} + 99}{100}\right)$

$= \dfrac{2}{T}\ln\left(e^{T/2}\left(\dfrac{1 + 99e^{-T/2}}{100}\right)\right)$

$= \underbrace{\dfrac{2}{T}\ln(e^{T/2})}_{\dfrac{2}{T} \times \dfrac{T}{2} = 1} + \underbrace{\dfrac{2}{T}\ln\left(\dfrac{1 + 99e^{-T/2}}{100}\right)}_{\xrightarrow[T \to +\infty]{} 0}$

Donc le nombre moyen d'insectes dans le milieu est 10^6.

2) Le travail demandé au candidat

Q1) $y' = \frac{1}{2} y(1-y) \Leftrightarrow \frac{y'}{y(1-y)} = \frac{1}{2}$ $\quad y \neq 0, 1$

$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} + \frac{y'}{1-y} = 1/2$

L'intérêt de cette écriture est de trouver y en intégrant l'égalité : $\int \frac{y'}{y} = \ln(|y|)$ ne pas oublier les valeurs absolues

$\Leftrightarrow \ln(y) - \ln(1-y) = 1/2\, t + K$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = 1/2\, t + K$

$\Leftrightarrow \frac{y}{1-y} = e^{1/2 t} \times C$

$\Leftrightarrow y = \frac{e^{1/2 t} \times C}{1 + C e^{t/2}} \Leftrightarrow y = \frac{e^{t/2}}{C' + e^{t/2}}$

Q2) Cf oral 2 | sujet 17 (Cellsheet)
puis tracer

Q3) On a vu que $f''(t) \geq 0$ pour $t \leq 2\ln 99$
et $f''(t) \leq 0$ pour $t \geq 2\ln 99$

Ainsi on aura P convexe pour $t \leq 2\ln 99$
P concave pour $t \geq 2\ln 99$,

ce qui permet de tracer plus précisément sa courbe représentative.

Enoncé conduisant à la mise en oeuvre de la méthode d'Euler :

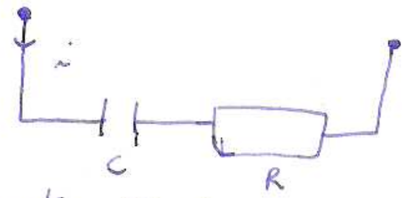
On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$(E) : y' = \frac{1}{2} y(1-y)$

Déterminer à l'aide d'un tableur, une courbe qui approche celle d'une fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 0{,}01$.

Exercice supplémentaire :

On considère le circuit électrique ci-dessous comprenant un résistor de résistance R et un condensateur de capacité C (R et C sont constants)



On note $q(t)$ la charge de l'armature du condensateur à l'instant t.

Dans le cours de sciences-physiques, on démontre que

$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U$ où U est la tension aux bornes du circuit, c'est à dire que la fonction $t \mapsto q(t)$ est solution de l'équation différentielle : $Ry' + \frac{1}{C} y = U$

1) Résoudre l'équation différentielle

2) Déterminer $q(t)$ sachant qu'à l'instant $t = 0$, la charge du condensateur est nulle.