

# CAPES EXTERNE DE MATHÉMATIQUES

## Epreuve sur dossier

**Thème :**  
**Probabilités et dénombrement**

### 1. L'exercice proposé au candidat

Dans un jeu de cinquante deux cartes, on choisit au hasard une main de cinq cartes.

1. Calculer la probabilité d'obtenir :

- a. une quinte flush (cinq cartes de hauteurs consécutives de la même couleur ; exemple : 7, 8, 9, 10, valet à carreau)
- b. une quinte (cinq cartes de hauteurs consécutives ne constituant pas une quinte flush)
- c. un full (trois cartes d'une même hauteur et deux de même hauteur distincte de la précédente ; exemple : trois dames et deux 8)
- d. une double paire (deux cartes d'une même hauteur, deux cartes d'une autre hauteur et enfin une cinquième carte d'une troisième hauteur ; exemple : deux dames, deux rois et un 10)

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une main de cinq cartes avec au moins un roi ?

### 2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :*

Q1) À quel niveau peut-on poser cet exercice ?

Q2) Mettre en évidence les différents types de raisonnements utilisés dans la question 1 de l'exercice proposé.

Q3) Un élève effectue le raisonnement suivant pour résoudre la question 2 :

« Pour constituer une main de cinq cartes contenant au moins un roi on choisit d'abord un roi (il y a quatre choix possibles) puis on choisit quatre cartes parmi cinquante et une (il y a  $\binom{51}{4}$  choix possibles) donc le nombre de mains de cinq cartes contenant au moins un roi est égal à  $4 \times \binom{51}{4} = 999\,600$  ».

Comment mettre en évidence son erreur ? Quelle méthode proposer pour résoudre la question ?

*Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :*

- sa réponse à la question Q3)
- Les énoncés d'un ou deux exercices utilisant différentes techniques de dénombrement pour le calcul de probabilités.

**Thème: Probabilités et dénombrement**

1) L'exercice proposé au candidat

A-a) Card {quinte flush} =  $\overset{\substack{\uparrow \\ \text{hauteurs}}}{3} \times \overset{\substack{\uparrow \\ \text{couleurs}}}{4} = 36$

$P(\text{quinte flush}) = \frac{36}{\binom{52}{5}} \approx 10^{-5}$

b) Card {quinte} =  $\overset{\substack{\uparrow \\ \text{hauteurs}}}{9} \times \overset{\substack{\uparrow \\ \text{couleur}}}{4} \times \overset{\substack{\uparrow \\ \text{couleur}}}{4} \times \overset{\substack{\uparrow \\ \text{couleur}}}{4} \times \overset{\substack{\uparrow \\ \text{couleur}}}{4} = 36$   
↑ quinte flush

$P(\text{quinte}) = \frac{9 \cdot 180}{\binom{52}{5}} = \frac{9}{2548} \approx 3 \times 10^{-3}$

c) Card {full} =  $\binom{13}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{12}{1} \times \binom{4}{2}$   
↑ on choisit une hauteur  
 ↑ on prend 3 cartes parmi les 4 de cette hauteur  
 ↑ on choisit une hauteur  
 ↑ on prend 2 cartes parmi les 4 de cette hauteur

$= 3744$   
 $P(\text{full}) = \frac{6}{4168} \approx 1 \times 10^{-3}$

d) Card {double paire} =  $\binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{11}{1} \times \binom{4}{1}$   
↑ on choisit deux hauteurs (pas d'ordre!)  
 ↑ on choisit deux cartes de chaque hauteur  
 ↑ une autre hauteur  
 ↑ on choisit une carte parmi les quatre de cette hauteur

2) on note A l'événement: "la main choisie contient au moins un roi".

on a donc  $\bar{A}$ : "la main ne contient aucun roi".

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} \approx 0,34$

2) Le travail demandé au candidat

Q1) C'est un exercice de niveau Terminale S, car on utilise les  $\binom{n}{k}$ .

Q2) on utilise le raisonnement par disjonction de cas par exemple:

- on distingue les hauteurs possibles, et on en choisit une
- par les hauteurs, on distingue les couleurs, et on en choisit une.

Q3) Par cette méthode, il s'élève compte certaines mains plusieurs fois.

Par exemple, s'il isole le roi de cœur et pioche 4 cartes parmi les 51 restantes il peut obtenir Rœu, V, 10, 8, Pique.

Mais lorsqu'il isole le roi de pique et pioche 4 cartes parmi les 51 restantes, il peut obtenir la même main.