CAPES EXTERNE DE MATHEMATIQUES

Epreuve sur dossier

Thème : Géométrie plane,
problèmes de constructions

1. L'exercice proposé au candidat

Partie A :
Sachant que les médiatrices d'un triangle sont concourantes, démontrer que les hauteurs d'un triangle le sont aussi.

Partie B :
Soit d_1, d_2 et d_3 trois droites concourantes distinctes deux à deux.
1- Construire un triangle EFG dont les droites d_1, d_2 et d_3 sont les hauteurs.
2- Construire un triangle ABC, dont les droites d_1, d_2 et d_3 sont les médiatrices.

2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1) Indiquer les différentes connaissances et méthodes mises en œuvre si cette situation est traitée au niveau du collège.

Q2) Ecrire un énoncé guidant des élèves de collège dans leur démarche de résolution. (On justifiera les choix)

Q3) Proposer une résolution de la question posée dans la partie A en utilisant des outils au programme des classes de lycée.

Q4) Donner un énoncé permettant à des élèves de terminale S, spécialité mathématiques, de résoudre la question 2 de la partie B en utilisant des transformations.

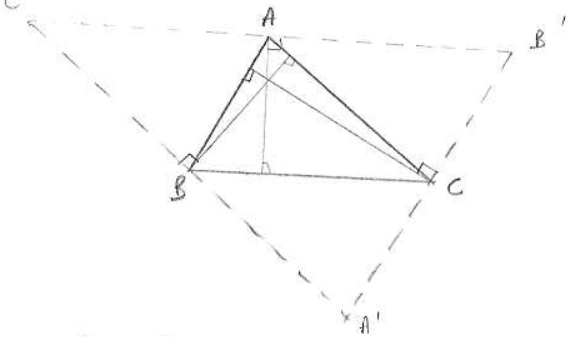
Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse à la question Q2)
- sa réponse à la question Q4)
- l'énoncé d'un exercice de construction utilisant des transformations.

Thème: Géométrie plane, problèmes de constructions

L'exercice proposé au candidat

Partie A :



Soit ABC un triangle quelconque.

Soit $A'B'C'$ le triangle dont les côtés $[B'C']$, $[C'A']$, $[A'B']$ sont respectivement parallèles aux côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ de ABC et passent par A, B, C.

$ABCB'$, $ACBC'$ et $ABA'C$ sont des parallélogrammes.

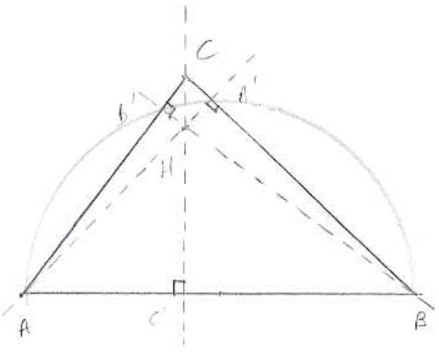
A, B, C sont donc les milieux respectifs de $[B'C']$, $[C'A']$, $[A'B']$ et par suite les hauteurs de ABC sont les médiatrices de $A'B'C'$.

Elles sont donc concourantes

Partie B :

1)

Analyse :



on note A', B', C' les pieds des hauteurs issues de A, B, C

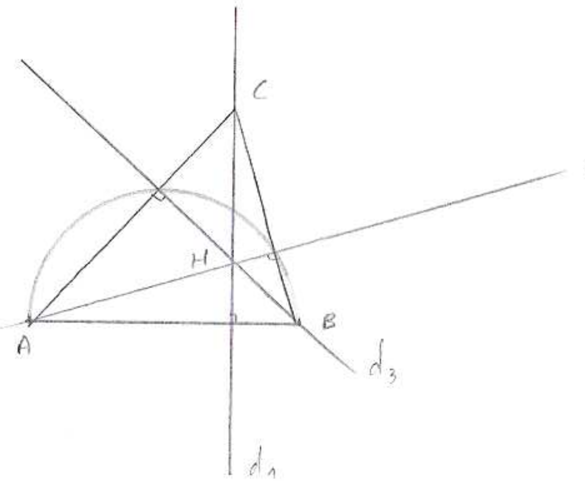
Synthèse :

on a $(AB) \perp (C'H)$

et les triangles ABB' et ABA' sont rectangles en A' et B'.

Ainsi, A' et B' appartiennent à l'intersection du cercle de diamètre $[AB]$ et (AH) et (BH).

Construction :



on prend A et B sur d_2 et d_3 tels que $(AB) \perp d_1$

on trace le demi-cercle de diamètre $[AB]$ et on trouve les pieds des hauteurs issues de A et B

La construction est toujours possible $\Rightarrow$ il y a une infinité de solutions. (Cf cas où deux hauteurs sont $\perp$ $\to$ on a un triangle rectangle).

2) Ayant trois droites concourantes, on peut tracer le triangle dont ces droites sont les hauteurs d'après 1).

On trace alors des droites parallèles aux côtés passant par les sommets du triangle comme en partie A, et on a le résultat.

2) Le travail demandé au candidat.

Q1) Connaissances:

- Définition des hauteurs d'un triangle
- Définition des médiatrices d'un triangle.
- Définition d'un parallélogramme (côtés opposés parallèles) et propriétés (notamment côté opposés de même longueur).
- un triangle ABC est rectangle en C si et seulement si C appartient au cercle de diamètre [AB].

Méthodes:

Sans qu'on leur dise, on utilise la méthode des deux lieux, en trouvant deux pieds de hauteurs comme intersections de deux ensembles

Q2) Cf fiche du jury.

Q3) Soit O le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC non plat

Soit A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

soit H le point vérifiant $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.

. $\vec{OH} - \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{OC}$

$\Leftrightarrow \vec{AH} = 2\vec{OA'} + \cancel{\vec{A'B}} + \cancel{\vec{A'C}}$ car A' milieu de $[BC]$

or O et A' appartiennent à la médiatrice de [BC].

donc H appartient à la droite $\begin{cases} \text{contenant } A \\ \text{parallèle à la méd. de } [BC] \end{cases}$

ie H appartient à la hauteur issue de A.

on montre de manière analogue que H appartient aux hauteurs issues de B et C

Bilan: H appartient aux trois hauteurs (qui sont distinctes) donc les hauteurs sont concourantes (en H!).

Prolongement: avec G centre de gravité de A,B,C.

G est l'isobarycentre de A, B, C

$\Leftrightarrow$ $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$ ie $\vec{OH} = 3\vec{OG}$ (relation d'Euler)

Ainsi dans tout triangle O, G, H sont alignés ($\to$ droite d'Euler).

(on pouvait aussi utiliser l'homothétie h de centre G et de rapport $-1/2$) $\to$ les hauteurs sont transformées en médiatrices donc $H \mapsto O$, $\vec{GH} = -1/2\, \vec{GO}$

FICHE DU JURY

Réponse à la question Q_2) :

Partie A : Soit $A'B'C'$ un triangle quelconque.

on note A, B et C les milieux respectifs de $[B'C']$, $[A'C']$, $[A'B']$.
et d_1, d_2, d_3 les médiatrices de $[B'C']$, $[A'C']$, $[A'B']$

1) Justifier que : (AB) est parallèle à $(A'B')$
(BC) est parallèle à $(B'C')$
(AC) est parallèle à $(A'C')$

2) En déduire que d_1, d_2, d_3 sont les hauteurs respectivement issues de A, B et C dans le triangle ABC

3) Sachant que les médiatrices d'un triangle sont concourantes, en déduire que les hauteurs le sont également.

Partie B : on considère d_1, d_2 et d_3 trois droites concourantes en O, distinctes deux à deux et non perpendiculaires deux à deux.

1) a) Placer un point A'' sur d_1 distinct de O.
Tracer la droite perpendiculaire à d_1 passant par A''.
on note B l'intersection de cette droite avec d_2
C l'intersection de cette droite avec d_3.

b) Tracer le cercle diamètre $[BC]$.
on note C'' l'intersection de ce cercle avec d_3 (autre que C)
B'' l'intersection de ce cercle avec d_2 (autre que B).

c) Justifier que les triangles $BC''C$ et $BB''C$ sont respectivement rectangles en C'' et B''.

d) on note A l'intersection des droites (BC'') et (CB'').

En déduire d'après ce qui précède que d_1, d_2, d_3 sont les hauteurs issues de A, B, C dans le triangle ABC.

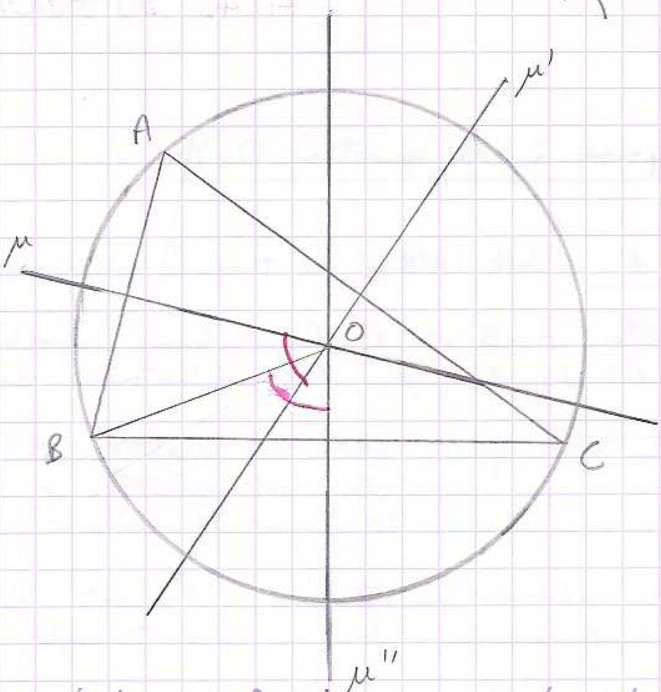
2) on considère le triangle $A'B'C'$ dont les côtés $[B'C']$, $[C'A']$ et $[A'B']$ sont respectivement parallèles aux côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ de ABC et passent par A, B, C.

a) montrer que $ABCB'$ et $ACBC'$ sont des parallélogrammes
en déduire que $C'A = AB'$ et donc que A est le milieu de $[B'C']$

b) montrer de manière analogue que B et C sont les milieux de $[C'A']$ et $[A'B']$

c) en déduire que d_1, d_2, d_3 sont les médiatrices de $[B'C']$, $[C'A']$ et $[A'B']$

Réponse à la question Q4).



Soit ABC un triangle quelconque.
on note O le centre de son cercle circonscrit.
Soit μ la médiatrice de $[AB]$
μ' la médiatrice de $[AC]$
μ'' la médiatrice de $[BC]$

on notera s_δ la reflexion d'axe δ.

1) quelle est l'image de B par $s_{\mu''}$?

2) quelle est l'image de B par $s_{\mu'} \circ s_\mu$?

3) Montrer que $s_{\mu'} \circ s_\mu$ est une rotation. Préciser son centre et son angle.

4) Montrer que $s_{\mu''} \circ s_{(OB)}$ est une rotation. Préciser son centre et son angle.

5) En déduire que $s_{\mu'} \circ s_\mu$ et $s_{\mu''} \circ s_{(OB)}$ définissent la même rotation

et donc que l'angle compris entre μ et μ' est le même que celui compris entre (OB) et μ''.

6) En déduire une construction du point B, puis du triangle ABC si seules μ, μ' et μ'' étaient données.

Exercice supplémentaire :

On considère deux droites parallèles d et δ et un point A n'appartenant ni à d, ni à δ.
le but de l'exercice est de construire un triangle ABC isocèle rectangle en B, tel que le point B appartienne à la droite d et que le point C appartienne à la droite δ.

1) Si une telle construction est réalisable, déterminer les similitudes directes de centre A qui transforment B en C.

2) Résoudre le problème posé. Combien y a-t-il de solutions ?