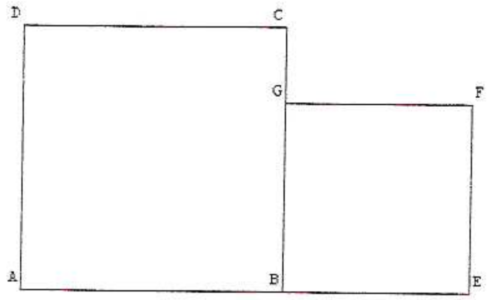
CAPES EXTERNE DE MATHEMATIQUES

Epreuve sur dossier

Thème : Géométrie
Etudes de configurations à l'aide de différents outils : similitudes

1. L'exercice proposé au candidat

ABCD et BEFG sont deux carrés directs avec G appartenant à la demi droite [BC).
Le but de l'exercice est de démontrer, à l'aide des similitudes, que les droites (AG), (EC) et (DF) sont concourantes.
Soit s la similitude directe qui transforme E en A et B en D.



1. Déterminer l'angle et le rapport de s.

2. On se place dans le plan complexe. B est l'origine du repère, C a pour affixe i et on note a l'affixe de E.
   a) Déterminer l'écriture complexe de s. En déduire les images par s de F et G
   b) Déterminer le centre P de la similitude.

3. En déduire que les droites (AG), (EC) et (DF) sont concourantes en P.

2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q1) Repérer les connaissances et les méthodes requises pour la résolution de l'exercice.
Q2) Proposer une autre méthode, qui n'utilise pas l'écriture complexe de s, permettant de déterminer les images de F et G par s.
Q3) Étudier la situation dans le cas où G n'est pas sur la droite (BC). (Les droites (AG), (EC) et (DF) sont-elles toujours concourantes ?)

Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- Sa réponse à la question Q2)
- Un exercice illustrant l'intérêt des similitudes pour étudier des configurations.

Thème : géométrie
Études de configurations à l'aide de différents outils : similitudes

1) L'exercice proposé au candidat

1) $s : E \longmapsto A$
$B \longmapsto D$ Ainsi $s : [EB] \longmapsto [AD]$

Donc s est une similitude d'angle $\pi/2$ car $(EB) \perp (AD)$ et de rapport BC/BG

2) a) $z' = cz + d$

$s : E \longmapsto A \Leftrightarrow -1 = ca + d$
$s : B \longmapsto D \Leftrightarrow -1+i = c \times 0 + d$

$\left.\begin{matrix} -1 = ca+d \\ -1+i = c\times 0 + d \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} c = -i/a \\ d = -1+i \end{matrix}\right.$

$$\boxed{s : z \longmapsto -\frac{i}{a} z - 1 + i}$$

b) $z_P = -\frac{i}{a} z_P - 1 + i \Leftrightarrow z_P = \frac{a(i-1)}{i+a}$

3) . Montrons que A, G, P sont alignés :

$\frac{z_P - z_A}{z_P - z_G} = \frac{a+1}{a(1-a)}$ donc $\arg\left(\frac{z_P - z_A}{z_P - z_G}\right) = 0\ [\pi]$.

. Montrons que E, C, P sont alignés :

$\frac{z_P - z_E}{z_P - z_C} = \frac{a(a+1)}{a-1}$ donc $\arg\left(\frac{z_P - z_E}{z_P - z_C}\right) = 0\ [\pi]$.

. Montrons que D, F, P sont alignés :

$\frac{z_P - z_F}{z_P - z_D} = -a^2$ donc $\arg\left(\frac{z_P - z_F}{z_P - z_D}\right) = 0\ [\pi]$

Bilan : (AG), (EC) et (DF) sont concourantes en P.

2) Le travail demandé au candidat

Q1) . l'image d'un segment par une similitude est un segment
- une similitude de rapport k multiplie les distances par $|k|$.
- l'image d'une droite par une similitude est une droite.
- l'angle formé par une droite et son image est égal à l'angle de la similitude
- écriture complexe d'une similitude directe.
- correspondance entre les nombres complexes et la géométrie pour caractériser des figures.
- déterminer le centre d'une similitude et ses propriétés.
- définition complexe de l'alignement de trois points.

Q2) L'image de E par s est A et celle de F est $s(F)$

donc $A\,s(F) = k\,EF = \frac{1}{a} \times a = 1$

De plus $(\vec{EF}, \vec{EB}) = \frac{\pi}{2}$. Donc $(\overrightarrow{As(F)}, \overrightarrow{AD}) = \pi/2$

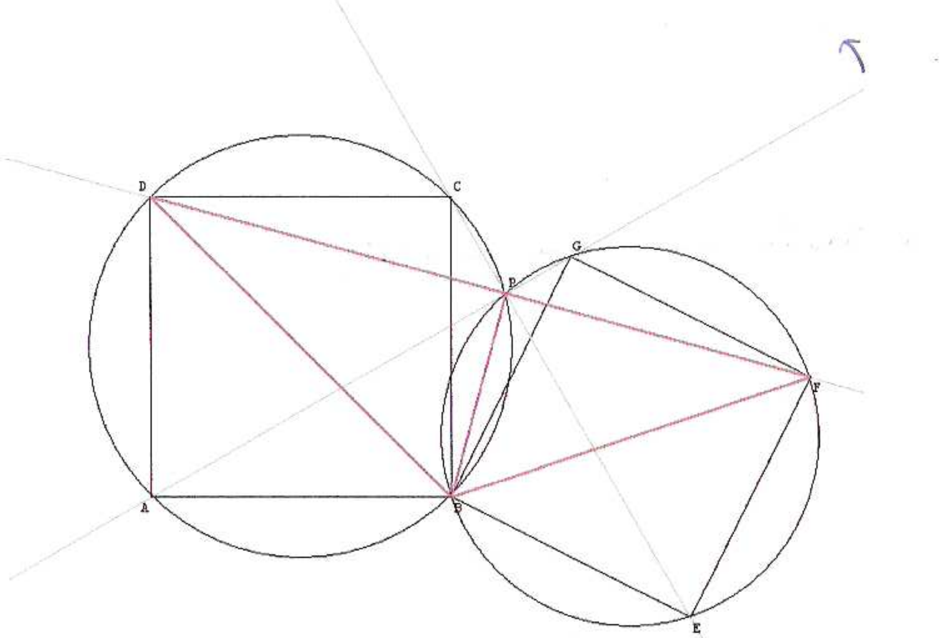
on en déduit que $s(F) = B$.

$(GB) // (EF)$ donc $(s(G)D) // (AB)$
$(GF) // (BE)$ donc $(s(G)B) // (DA)$

Donc $s(G)$ est à l'intersection de la parallèle à (AB) passant par D et de la parallèle à (AD) passant par B

Ainsi $s(G) = C$.

Q3) Cf oral 21 sujet 41 (cahier) :



on s'aperçoit à la calculatrice que les droites (AG), (EC) et (DF) sont concourantes quelque soit la position du point G dans le plan.

soit r la rotation de centre B et d'angle $\pi/2$.

$r: E \mapsto G$
$C \mapsto A$ donc $r : (EC) \longmapsto (AG)$.

Ainsi (AG) et (EC) sont perpendiculaires : on note P leur point d'intersection.

les triangle CPA et GPE sont rectangles en P, donc P appartient aux cercles circonscrits des carrés ABCD et BEFG

Ainsi les triangles DBP et EFP sont rectangles en P.

Ainsi $\widehat{DPF} = 180°$ et donc P appartient à (DF).