1717

Thème : Fonctions
Etude du comportement local

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction f définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-\cos x}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.
Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par l'origine O du repère.

1) a) Déterminer l'équation de la tangente T_a à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a de $[0,\pi]$.

   b) Montrer que T_a passe par O si et seulement si $a \sin a = 1$.

2) Soit la fonction ψ définie sur $]0,\pi]$ par $\psi(x) = \sin x - \dfrac{1}{x}$.

   a) Étudier les variations de ψ' sur $]0,\pi]$.

   b) En déduire que la fonction ψ admet un maximum absolu M qu'elle atteint en un unique x_0 de l'intervalle $]0,\pi]$.

   c) Calculer $\psi'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ et en déduire la position de $\dfrac{\pi}{2}$ par rapport à x_0.

   d) Calculer $\psi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ et en déduire le signe de M.

3) À l'aide des questions précédentes, déterminer le nombre de tangentes à $\mathcal{C}_f$ qui passent par O.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Dégager les outils et les méthodes nécessaires à la résolution de cet exercice.

$Q.2$) A l'aide de votre calculatrice, donner une valeur approchée des coordonnées des points où la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par O. Tracer $\mathcal{C}_f$ et les tangentes en question.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Sa réponse à la question $Q.1$).
– Un ou deux énoncés d'exercices se rapportant au thème « **Fonctions** ».

Dossier N ° 16, 17 juillet
Fonctions. Etude du comportement local
(extraits de programmes : 1e S, Terminale S)

Le sujet, assez classique, contenait un exercice accessible aux candidats, qui ont dans l'ensemble réussi à effectuer les calculs demandés. Mais ils ont souvent éprouvé des difficultés à énoncer de manière claire et rigoureuse les propriétés et théorèmes utilisés, qu'il s'agisse du théorème des valeurs intermédiaires ou du corollaire cité dans le programme de terminale S (cas d'une fonction strictement monotone). Sur la question Q1), les candidats présentent le plus fréquemment des outils, sans étudier les méthodes.
La manipulation de la calculatrice était dans l'ensemble assez satisfaisante ; cependant on en est resté le plus souvent à l'illustration des résultats par ailleurs trouvés, et non à l'utilisation pour émettre des conjectures.
Le thème proposé, version large (« les fonctions ») laissait une grande liberté de choix aux candidats, et allait bien au-delà de l'étude des comportements locaux. Cela ne les a malgré tout pas conduits, dans l'ensemble, à utiliser toute l'amplitude du thème, et leurs choix ont souvent été jugés peu variés.

17/7/2006

Thème : Fonctions
Etude du comportement local

1) L'exercice proposé au candidat

1. a) L'équation de la tangente T_a à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a de $[0;\pi]$ est :

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$\Leftrightarrow y = \sin a \, e^{-\cos a}(x-a) + e^{-\cos a}$

b) $\sin a \, e^{-\cos a}(0-a) + e^{-\cos a} = 0$

$\Leftrightarrow (-a\sin a + 1)\, e^{-\cos a} = 0$

$\Leftrightarrow a \sin a = 1$ car $e^{-\cos a} \neq 0 \ \forall a \in [0;\pi]$

2. a) $\psi''(x) = -\sin x - 2/x^3$

x	0		π
$\psi''(x)$	$\|\|$	$-$	0
ψ'	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-1+\frac{1}{\pi^2}$

b) ψ' est strictement monotone et continue sur $]0,\pi]$.

Par le TVI, on sait alors qu'elle ne s'annulera qu'une unique fois en un point de $]0,\pi]$, noté x_0.

et comme $\psi' > 0$ sur $]0, x_0[$

et $\psi' < 0$ sur $]x_0, +\infty[$

ψ atteint un maximum absolu M en x_0.

c) $\psi'(\pi/2) = \cos \pi/2 + \frac{1}{(\pi/2)^2} > 0$

Donc $x_0 \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$

d) $\psi(\pi/2) = 1 - 2/\pi > 0$ donc $M > 0$ puisque $M > \psi(\pi/2)$.

3) D'après 1) b) T_a passe par $O \Leftrightarrow a \sin a = 1$

or $a \sin a = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin a - 1/a = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

or d'après les questions précédentes,

x	0		x_0		π
ψ	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$M>0$	$\searrow$ 0	$-1/\pi$

Par le TVI, ψ s'annule exactement deux fois.

il y a donc deux tangentes à $\mathcal{C}$ qui passent par O.

2) Le travail demandé au candidat.

Q1) • Equation de la tangente à une courbe en un point.

• Dérivation

• TVI

• Pour montrer qu'une fonction continue s'annule une unique fois sur un intervalle,
On montre qu'elle est strictement monotone et qu'il existe (a, b) tel que $f(a)f(b) < 0$

• Pour montrer qu'un maximum est positif, on montre qu'il existe c tel que $\varphi(c) > 0$

Q2) sur le graphe de φ, on cherche les valeurs des abscisses pour lesquelles $\varphi = 0$.
on trouve $x_1 \simeq 1,10$ et $x_2 \simeq 2,77$

On trace ensuite $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{T_{1,10}}$ et $\mathcal{C}_{T_{2,77}}$