13/7

Thème : Probabilités conditionnelles

1. L'exercice proposé au candidat

On considère un carré $ABCD$ et son centre de gravité Ω. On note $\mathcal{E} = \{A, B, C, D, \Omega\}$.

Une puce se déplace aléatoirement en sautant d'un point de $\mathcal{E}$ à un autre. La seule contrainte est que si un saut relie deux sommets du carré, ceux-ci doivent être adjacents. À chaque saut, tous les déplacements possibles sont équiprobables. La puce ne reste pas deux fois de suite au même endroit.

Au départ (c'est-à-dire avant son premier saut) elle se trouve au point Ω.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note Ω_n l'événement « *la puce se trouve au point Ω à l'issue de son n-ième saut* ».

On définit de même les événements A_n, B_n, C_n, D_n. On notera $p_n = p(\Omega_n)$ (donc $p_0 = 1$).

1) Calculer p_1 et p_2.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier les égalités $p(A_n) = p(B_n) = p(C_n) = p(D_n) = \dfrac{1}{4}(1 - p_n)$.

3) Montrer que $p_{n+1} = \dfrac{1}{3}(1 - p_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (utiliser la formule des probabilités totales).

4) En déduire que pour tout n on a $p_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{1}{4}$.

2. Le travail demandé au candidat

> En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Dégagez les méthodes et outils nécessaires à la résolution de cet exercice.

$Q.2$) Comment se généralise le problème si l'on remplace le carré $ABCD$ par un polygone à k sommets ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Sa réponse à la question $Q.2$).

– Un ou deux exercices se rapportant au thème « **Probabilités conditionnelles** ».

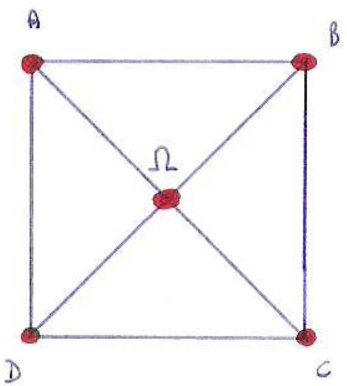
Dossier N ° 12, 13 juillet
Probabilités conditionnelles
(extraits de programmes : 1e S, Terminales ES et S)

Le manque de variété des exercices proposés par les candidats a été particulièrement remarqué à l'occasion de ce dossier : l'étude de la fiabilité d'un test de dépistage d'une maladie apparaissait avec une fréquence impressionnante.
L'exercice proposé par le jury a été assez diversement traité, et il s'est révélé en fait fortement discriminant.
La question portant sur la généralisation à un polygone a permis - les concepteurs du dossier ne l'avaient en aucun cas fait exprès - la confusion entre le 4 de la formule de la dernière question de l'exercice et le 4 comme nombre de sommets du carré, de sorte que beaucoup de candidats, qui n'avaient pas correctement abordé cette question, se sont contentés de remplacer 4 par k...
La deuxième question appelait évidemment une résolution utilisant l'argument du rôle symétrique joué par les quatre sommets (toute autre méthode serait beaucoup plus longue, et passerait vraisemblablement par le résultat de la question suivante). Ceci s'est révélé difficile pour les candidats. Il n'était pas nécessaire de fournir de manière particulièrement formalisée la preuve de cette symétrie ; néanmoins une démonstration de l'égalité des quatre nombres pouvait être établie par récurrence en restant strictement dans le cadre des programmes.

13/7/2006

Thème : Probabilités Conditionnelles

1) L'exercice proposé au candidat



1) $p_0 = 1$
$p_1 = 0$
$p_2 = 1/3$

2) $p(A_n) = p(B_n) = p(C_n) = p(D_n)$ par des raisons de symétrie dans le carré.

De plus $p(A_n) + p(B_n) + p(C_n) + p(D_n) + p_n = 1$

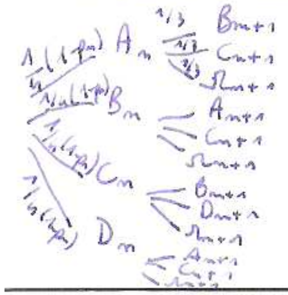
$\Leftrightarrow 4\,p(A_n) = 1 - p_n$

$\Leftrightarrow p(A_n) = \frac{1}{4}(1-p_n)$.

3) $p_{n+1} = p(A_n)\times 1/3 + p(B_n)\times 1/3 + p(C_n)\times 1/3 + p(D_n)\times 1/3$

$= 1/3 \times 4 \times \frac{1}{4}(1-p_n) = 1/3\,(1-p_n)$.

Avec un arbre, on aurait :



D'où le résultat.

4) Par récurrence sur n.

- si $n=0$ $\quad p_0 = \frac{1}{4} + 3/4\,(-1/3)^0 = 1$ ok
- On suppose $p_n = 1/4 + 3/4\,(-1/3)^n$

$p_{n+1} = 1/3\,(1-p_n)$

$= 1/3\left(1 - 1/4 - 3/4\,(-1/3)^n\right)$

$= 1/3\left(3/4 - 3/4(-1/3)^n\right)$

$= 1/4 - 1/3 \times 3/4\,(-1/3)^n$

$= 1/4 + 3/4(-1/3)^{n+1}$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}\ p_n = 1/4 + 3/4\,(-1/3)^n$

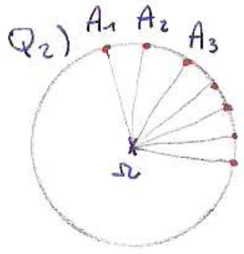
et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1/4$ $\quad$ car $(-1/3)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

car $|-1/3| < 1$

2) Le travail demandé au candidat

Q1) - Symétrie du carré
- Somme des probabilités de tous les évènements possibles = 1.
- Formule des probabilités totales
- Raisonnement par récurrence
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n$

Q2)



1) $p_0 = 1$
$p_1 = 0$
$p_2 = 1/3$

2) $p(A_{1n}) + p(A_{2n}) + \dots + p(A_{kn}) + p_n = 1$

$\Leftrightarrow k\,p(A_{1n}) = 1 - p_n$

$\Leftrightarrow p(A_{1n}) = 1/k\,(1-p_n)$

3) $1/3 \times \cancel{k} \times \frac{1}{\cancel{k}}(1-p_n) = p_{n+1}$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1/4$