12/7

Thème : Outils

Le calcul vectoriel et la géométrie analytique

1. L'exercice proposé au candidat

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'ensemble $(\mathscr{S})$ défini par :

$$\mathscr{S} = \{M(x, y, z) \in \mathscr{E};\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + 1 = 0\}$$

1) Montrer que $(\mathscr{S})$ est une sphère dont on donnera le centre et le rayon.

2) Montrer que le point $A(2, 2, -1)$ appartient à $(\mathscr{S})$ et déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P}_1)$ tangent à $(\mathscr{S})$ au point A.

3) a) Montrer que le plan $(\mathscr{P}_2)$ d'équation $x + y - z - 1 = 0$ coupe $(\mathscr{S})$.

   b) Déterminer le rayon du cercle $(\mathscr{C})$ intersection de $(\mathscr{P}_2)$ et $(\mathscr{S})$.

   c) Déterminer les coordonnées du point Ω centre de $(\mathscr{C})$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Enoncer les théorèmes et les outils mis en jeu dans l'exercice.

Q.2) Rédiger un énoncé détaillé pour aider un élève de Terminale S à faire la question 3) c).

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- Sa réponse à la question Q.2).
- Les énoncés de deux exercices de géométrie analytique dont l'un au moins permet de résoudre un problème posé dans l'espace.

Dossier N ° 11, 12 juillet
Outils. Le calcul vectoriel et la géométrie analytique
(extraits de programmes : 1e S, Terminale S)

Ce dossier s'est révélé très ouvert, et la qualité des propositions d'exercices effectuées par les candidats était très variable, ce qui constituait un bon item d'évaluation.

Sur l'exercice du jury, on remarque que l'ensemble de la question 3) est très discriminant ; nombreux sont les candidats qui n'abordent pas cette question de manière géométrique, et se contentent de poser le système des deux équations (plan et sphère), ce qui ne peur permet pas de trouver la solution. Ceci est à relier avec les observations selon lesquelles trop de candidats n'ont même pas tenté de réaliser une figure.

12/7/2006

Thème : Outils
Le calcul vectoriel et la géométrie analytique

1) L'exercice proposé au candidat

1) $x^2+y^2+z^2-4x+2z+1=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2+(z+1)^2-4-1+1=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2+(z+1)^2=4$

Ainsi $(\mathcal{S})$ est une sphère de centre $C(2;0;-1)$ et de rayon 2.

2) $(2-2)^2+2^2+(-1+1)^2=4$ donc $A(2,2,-1)\in(\mathcal{S})$.

(P_1) admet $\vec{CA}$ comme vecteur normal. $\vec{CA}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$

d'où (P_1) : $0\times x+2\times y+0\times c+d=0$

or $A\in(P_1)$: $2\times 2+d=0$

D'où $\underline{(P_1) : 2y-4=0}$

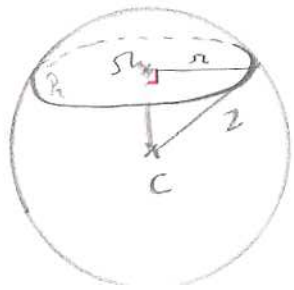
3) a) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x+2z+1=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases}$

or $(2,0,1)$ vérifie les deux équations

et $(0,0,-1)$ aussi.

donc (P_2) coupe $(\mathcal{S})$

b)



$C\Omega = d(C,P_2)$

$= \dfrac{|1\times 2+1\times 0-1\times -1-1|}{\sqrt{1^2+1+(-1)^2}}$

$= 2/\sqrt{3}$

Par Pythagore : $r^2=2^2-(2/\sqrt{3})^2=\dfrac{8}{3}$

D'où $r=\sqrt{\frac{8}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$

c) On a :

$C\Omega^2=(2/\sqrt{3})^2$

$B(0,0,-1)\Rightarrow \Omega B^2=\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$

$\Omega\in(P_2)$

D'où le système suivant :

$$\begin{cases} (x_\Omega-2)^2+y_\Omega^2+(z_\Omega+1)^2=(2/\sqrt{3})^2 \\ x_\Omega^2+y_\Omega^2+(z_\Omega+1)^2=\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 \\ x_\Omega+y_\Omega-z_\Omega-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Omega=4/3 \\ y_\Omega=-2/3 \\ z_\Omega=-1/3 \end{cases}$$

2) Le travail demandé au candidat

Q1) . Une sphère de centre A et de rayon r a pour équation $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=r^2$

. $\{M(x,y,z)\ /\ ax+by+cz+d=0\}$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.
et réciproquement tout plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ a une équation du type $ax+by+cz+d=0$

. Montrer que l'intersection de deux ensembles est non vide et non réduite à un point.

. Distance d'un point à un plan

. Théorème de Pythagore

. Résolution d'un système de trois équations à trois inconnues

Q2) . Calculer $C\Omega^2$ en fonction de $x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega$

. Montrer que $B(0,0,-1)\in\mathcal{S}\cap P_2$

. Calculer ΩB^2 en fonction de $x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega$

. Trouver une troisième condition que doit vérifier Ω et résoudre le système formé par les trois équations trouvées.