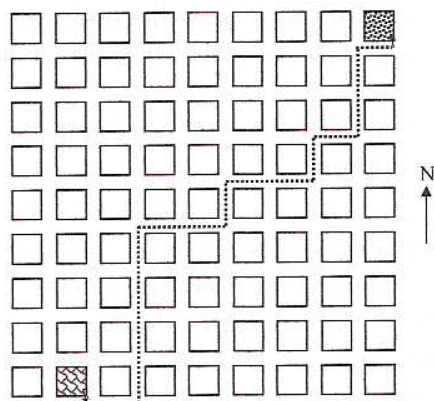


### Thème : Techniques de dénombrement

#### 1. L'exercice proposé au candidat

Un homme travaille à Manhattan, dans un quartier où les avenues sont orientées nord-sud et les rues est-ouest. Il travaille à sept pâtés de maison à l'est et huit pâtés de maison au nord de son domicile. Pour aller à son travail chaque jour il parcourt donc la longueur de quinze pâtés de maison (il ne se dirige ni au sud ni à l'ouest).

On suppose qu'il existe une voie le long de chaque pâté de maisons et qu'il peut prendre n'importe lesquelles dans ce schéma rectangulaire. Le dessin ci-dessous illustre la situation ; un trajet a été représenté en pointillé.



- 1) Proposer un « codage » permettant de décrire le trajet représenté.
- 2) Combien de trajets différents l'homme peut-il emprunter ?
- 3) L'homme prétend que le nombre de trajets est aussi le nombre de suites de huit entiers naturels dont la somme est 8. A-t-il raison ?

#### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera la question suivante :

- Q.1) À quel niveau pensez-vous pouvoir proposer cet exercice ? Quelles indications souhaiteriez-vous ajouter (questions intermédiaires, suggestion de représentations, ...)?
- Q.2) La question 3) de l'exercice

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- Deux exercices sur le thème : « Techniques de dénombrement »

**Dossier N° 7, 5 juillet**  
**Techniques de dénombrement**

(extraits de programmes : 1e STI, STL, SMS, Terminales STI, STL, SMS, S)

Sur l'exercice proposé par le jury, le fait que le contenu soit « concret » a conduit certains candidats à donner des solutions sans nécessairement savoir comment justifier la validité de leur réponse. La difficulté de la question Q3) a été assez généralement jugée excessive par les commissions, ce qui est un peu surprenant, s'agissant d'un problème extrêmement classique de combinatoire.

Les exposés des candidats ont été souvent assez pauvres et courts, de sorte que l'impression était celle d'un sujet peu discriminant. Mais cette impression ne concorde pas avec l'analyse statistique des notes reçues par l'ensemble des candidats ayant composé ce jour. En effet, la dispersion de leurs notes est tout à fait dans la normale des dispersions observées les autres jours.

Certains candidats maîtrisant insuffisamment les concepts ou les connaissances fondamentales essaient de faire intervenir les probabilités, mais dans la confusion.

Les exercices proposés par les candidats sont très inégaux, et il est trop fréquent de voir échouer la résolution.

Pour ce dossier particulier, vu les réactions rencontrées, voici une proposition pour la solution complète de l'exercice proposé par le jury.

1 : À tout chemin possible on peut associer la succession des choix que l'on fait à chaque intersection rencontrée. Ces choix peuvent être codés par « E » (est) et « N » (nord), ces deux directions étant les seules répondant aux conditions proposées. Le chemin dessiné devient par exemple : « ENNNNEENEENENNE ». Il est évident que, vice-versa, la donnée de cette suite permet de connaître sans ambiguïté le chemin correspondant puisqu'à chaque intersection, on saura où se diriger. 2 : Les chemins ayant les points de départ et d'arrivée donnés ont tous en commun qu'il faut aller 8 fois vers le nord et 7 fois vers l'est. Dans le codage, on trouvera donc nécessairement sept fois « E » et 8 fois « N ». Donc tout codage est une suite de quinze symboles composée de 7 « E » et « N ». Vice-versa, à toute suite de quinze symboles composée de 7 « E » et 8 « N » correspond un unique chemin possible. Il apparaît ici en fait une bijection entre l'ensemble des chemins et l'ensemble des suites de 15 caractères dont 7 « E » et 8 « N ».

Le nombre des solutions est alors :  $\binom{15}{7} = \binom{15}{8} = 6435$

3 : A chaque chemin on peut associer la longueur des parcours que l'on fait vers le nord dans chacune des avenues (orientées nord-sud) que l'on rencontre ou croise. Il y a 8 avenues possibles, visibles sur le dessin (les 7 pâtés de maison séparent ces 8 avenues), ce qui donnera, quel que soit le chemin, une suite de huit entiers naturels. Ainsi au chemin donné en exemple on peut associer la suite ; à partir de ce nouveau codage, on retrouvera l'ancien codage, ou directement le chemin comme suit :

- placer 0 « N » avant le premier « E », c'est-à-dire emprunter la 1e avenue rencontrée sur 0 pâtés, donc prendre la rue vers l'est jusqu'à l'avenue suivante ;
- placer 4 « N » entre le premier « E » et le second, c'est-à-dire emprunter la deuxième avenue sur 4 pâtés exactement vers le nord, puis prendre la rue atteinte vers l'est jusqu'à l'avenue suivante ;
- placer 0 « N » entre le second « E » et le troisième, c'est-à-dire emprunter la troisième avenue rencontrée sur 0 pâté, et prendre la rue vers l'est jusqu'à l'avenue suivante ;
- placer 1 « N » entre le troisième « E » et le quatrième, etc.

Ces instructions déterminent le chemin (ou la suite associée) de manière non ambiguë, puisque l'on sait pour chaque avenue rencontrée ce que l'on doit faire.

Les huit entiers naturels formant la suite ont obligatoirement pour somme 8, pour que le point d'arrivée soit bien celui demandé.

On trouve ici une bijection entre l'ensemble des suites de huit entiers naturels de somme

8 et celui des chemins. Le nombre cherché est donc le nombre de suites de huit entiers naturels de somme huit. CQFD

## Thème : Techniques de dénombrement

## 1) L'exercice proposé au candidat

- 1) "N" : un pas vers le nord.  
 "E" : un pas vers l'est.

Le trajet représenté : "E;N;N;N;E;E;N;E;E;N;E;E;N;E;N;N;E"

- 2) Chaque trajet peut donc être matérialisé par une suite de 15 éléments ne comprenant que des "E" et des "N".

Il y a donc autant de trajets que de façons de ranger 7 "E" dans la suite ou 8 "N" dans la suite

$$\text{Ainsi le nombre cherché vaut } \binom{15}{7} = \binom{15}{8}$$

- 3) Pour chaque trajet on peut faire une représentation de ce type : "un ";" pour un pas vers l'est  
 • un nombre correspondant au nombre de "N" entre deux "E".

$$\text{Ainsi : (E;N;N;N;E;E;N;E;E;N;E;E;N;E;N;N;E)}$$



$$(0;4;0;1;0;1;2;0)$$

Donc il y a autant de trajets que de suites de huit entiers dont la somme fait huit.

## 2) Le travail demandé au candidat

Q1) Terminale S.

- Montrer que le nombre de trajets possibles vaut  $\binom{15}{8} = \binom{15}{7}$

• En codant un "E" par "1";

et en mettant entre deux ";" le nombre de pas vers le nord, montrer que le nombre de trajets est aussi le nombre de suites de huit entiers naturels dont la somme est huit.