

Thème : Outils
Les nombres complexes

1. L'exercice proposé au candidat

On se donne un rectangle $ABCD$ (direct) et on pose $AB = CD = a$, $AD = BC = b$ ($a > 0$, $b > 0$).

On se pose le problème suivant (cf fig.1) : existe-t-il un triangle équilatéral APQ inscrit dans le rectangle $ABCD$ (le point P appartenant au segment $[BC]$ et le point Q au segment $[CD]$) ?

- 1) Soit P un point quelconque de $[BC]$ et Q un point quelconque du segment $[CD]$. On pose $DQ = x$ et $BP = y$. Montrer que APQ est équilatéral si et seulement si
- $$\begin{cases} x = 2a - b\sqrt{3} \\ y = 2b - a\sqrt{3} \end{cases}$$

Indication : utiliser les affixes, et une rotation de centre A .

- 2) En déduire que le problème a une solution si et seulement si $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ et qu'alors elle est unique.
- 3) On suppose que le problème posé admet une solution. On construit les triangles équilatéraux BCI et CDJ , comme indiqué figure 2. Soit P le point d'intersection des droites (AJ) et (BC) , et Q le point d'intersection des droites (AI) et (CD) . Montrer que APQ est le triangle équilatéral cherché.

En déduire une construction du triangle APQ à la règle et au compas.

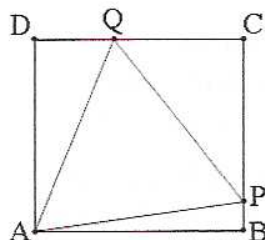


fig.1

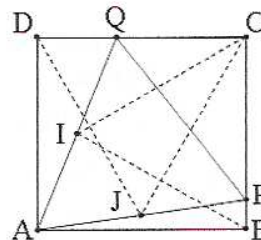


fig.2

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- Q.1) Dégagez les méthodes et outils nécessaires à la résolution de cet exercice.
- Q.2) En utilisant l'environnement de géométrie dynamique de la calculatrice, construire le rectangle $ABCD$ et le triangle équilatéral APQ (quand il existe). Animer la figure de façon à voir les conditions limites entre lesquelles le problème posé admet une solution.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- Sa réponse à la question Q.1).
- Un ou deux énoncés d'exercices se rapportant au thème « **Géométrie : nombres complexes** ».

Dossier N° 4, 2 juillet

Outils : les nombres complexes

(extraits de programmes : Terminale S)

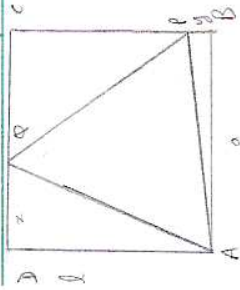
L'impression générale est celle d'un dossier qui s'est révélé difficile à traiter dans le temps imparti. Il a été perçu comme long, et s'y ajoutait le travail demandé sur la calculatrice. La conséquence a été que la partie « choix d'exercices » a été particulièrement négligée, les exercices proposés n'étant pas assez travaillés.

Bien qu'une amélioration soit perçue par rapport à l'année dernière, l'usage de l'environnement géométrique des calculatrices reste encore trop souvent méconnu et l'animation a posé beaucoup de problèmes aux candidats.

Le plus inquiétant est la persistance des difficultés logiques rencontrées par les candidats dans l'établissement des équivalences que réclamait l'exercice.

Thème: Outils les nombres complexes

1) L'exercice proposé au candidat.



1) Déterminons les affixes des points dans le repère $(A, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$

$$\begin{aligned} A(0) \\ B(a) \\ C(a+ib) \\ P(a+iy) \\ Q(x+ib) \end{aligned}$$

soit la rotation de centre A, et d'angle $\pi/3$
APQ équilatéral $\Leftrightarrow x: P \rightarrow Q$

$$\Leftrightarrow x+ib = e^{i\pi/3}(a+iy)$$

$$\Leftrightarrow x+ib = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(a+iy)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ b = \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - \sqrt{3}b \\ y = 2b - \sqrt{3}a \end{cases}$$

2). Si le problème a une solution alors

$$\begin{cases} x \geq 0 & (1) \\ y \geq 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 2a - \sqrt{3}b \geq 0 \Leftrightarrow 2a \geq \sqrt{3}b \Leftrightarrow \frac{a}{b} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \Leftrightarrow 2b - \sqrt{3}a \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}a \leq 2b \Leftrightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Donc on a bien l'inégalité $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

• Réciproquement, si $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$, en remontant

les inégalités, on a $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
De plus $\frac{a}{b} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sqrt{3}a \geq b \Rightarrow 2b - \sqrt{3}a \leq b$

$$\frac{a}{b} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow a \leq \sqrt{3}b \Leftrightarrow \underbrace{2a - b}_{=x} \leq a$$

Ainsi, les inégalités fournissent: $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$
Ce qui assure l'existence de solutions.

• Unicité: l'unicité de la solution est assurée par la question 1, x et y étant "fixés" par a et b .

3) Cherchons les affixes z_I et z_J des points I et J:

$$\begin{aligned} z_I &= e^{i\pi/3}(x+ib - a) + a \\ &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(ib) + a = a - \frac{\sqrt{3}}{2}b + i\frac{b}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_J &= e^{i\pi/3}(ib - a - ib) + a + ib \\ &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-a) + a + ib \\ &= \frac{1}{2}a + i\left(b - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } (A, I) \text{ a pour équation: } y = \frac{b/2}{a - \sqrt{3}b/2}x$$

et Q a donc pour coordonnées $(2a - \sqrt{3}b, b)$

$$\text{Ainsi } (A, J) \text{ a pour équation: } y = \frac{b - \frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}a}x$$

et P a pour coordonnées $(a, 2b - \sqrt{3}a)$

P et Q sont donc solutions

On peut alors tracer le triangle à la règle et au compas.

2) Le travail demandé au candidat

Q1). Notions sur les nombres complexes

- écriture complexe d'une rotation
- Propriétés du triangle équilatéral
- Equations de droites
- Intersection de deux droites

Q2) Calculatrice. ord 21 a 0706