1 17

Thème : Les suites

1. L'exercice proposé au candidat

Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = a \in \mathbb{R} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+2} = \alpha u_{n+1} - (\alpha - 1)\, u_n \end{cases}$$

1) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. En déduire v_n en fonction de α, n, et a.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = u_{n+1} - (\alpha - 1)\, u_n$. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.

3) Calculer u_n en fonction de v_n et w_n puis u_n en fonction de α, n et a.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Proposer une utilisation de la calculatrice pour le calcul des premiers termes des trois suites rencontrées.

Q.2) Comment choisiriez-vous les suites auxiliaires $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie avec une relation de récurrence de la forme : $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$?

Q.3) Le paramètre α prend des valeurs dans $\mathbb{R}$ privé de 2, pourquoi ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

(i) sa réponse à la question Q.2)

(ii) Deux exercices sur le thème des suites, mettant en jeu d'autres notions sur les suites.

Dossier N ° 3, 1er juillet
Suites
(extraits de programmes : 1e S, Terminale S)

La réponse à la première question (calcul de termes successifs à l'aide d'une calculatrice) pouvait être réalisée de manière minimale (entrée de valeurs particulières des paramètres et observations particulières correspondantes) ou bien en utilisant les possibilités du calcul formel. L'important pour le candidat était de manifester des aptitudes à illustrer et à observer le comportement des suites obtenues.
Pour la question *Q.2)*, beaucoup de candidats ont cherché à tort une suite constante, au lieu de chercher deux suites géométriques (de raison non nécessairement nulle).
Le thème est large, et il était souhaité que les candidats proposent des exercices ne se limitant pas à des récurrences linéaires.

1/7/2006

Thème : Les suites

1) L'exercice proposé au candidat

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = a \in \mathbb{R} \\ u_{n+2} = \alpha u_{n+1} - (\alpha - 1) u_n \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

1) $v_n = u_{n+1} - u_n$

$= (\alpha u_n - (\alpha - 1) u_{n-1}) - u_n$

$= (\alpha - 1)(u_n - u_{n-1})$

$= (\alpha - 1) v_{n-1}$

donc (v_n) est une suite géométrique, de raison $\alpha - 1$

$v_n = v_0 \times (\alpha - 1)^n$

$= (u_1 - u_0) \times (\alpha - 1)^n$

$= a \times (\alpha - 1)^n$

2) $w_{n+1} - w_n = u_{n+2} - (\alpha - 1) u_{n+1} - u_{n+1} + (\alpha - 1) u_n$

$= u_{n+2} - \alpha u_{n+1} + \cancel{u_{n+1}} - \cancel{u_{n+1}} + (\alpha - 1) u_n$

$= u_{n+2} - u_{n+2}$

$= 0$. donc $w_n = w_0 = a$

3) $v_n = u_{n+1} - u_n$

$w_n = u_{n+1} - \alpha u_n + u_n$

$w_n - v_n = -\alpha u_n + u_n + u_n \Rightarrow u_n = \dfrac{w_n - v_n}{2 - \alpha}$

$$u_n = \frac{a - a(\alpha - 1)^n}{2 - \alpha}$$

2) Le travail demandé au candidat.

Q1) - Définir u dans l'éditeur de programmes

- illustrer le fait que v est géométrique
- illustrer le fait que w est constante.
- Pour des valeurs particulières de a et α, tracer les suites u, v et w.

Q2) D'après l'exemple proposé, on cherche des suites géométriques (suite constante = suite géométrique de raison 1) de la forme $u_{n+1} - k u_n$.

Une telle suite est géométrique de raison q, si et seulement si, pour tout n :

$u_{n+2} - k u_{n+1} = q(u_{n+1} - k u_n)$

$\Leftrightarrow u_{n+2} = (k + q) u_{n+1} - kq\, u_n$

On est donc amenés à déterminer k et q tels que $k + q = 2$ et $kq = -3$

les solutions sont $\begin{cases} k = 3 \\ q = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} k = -1 \\ q = 3 \end{cases}$

Les deux suites auxiliaires sont donc :

$v_n = u_{n+1} - 3u_n$ de raison -1

$w_n = u_{n+1} + u_n$ de raison 3.

Q3) (v_n) et (w_n) seraient égales, constantes.
(u_n) serait donc une suite arithmétique de raison a.
[et si on se réfère à la question 3) (u_n) ne serait pas définie).