

Thème : Equations différentielles

Problèmes issus de la géométrie, de la physique, de la biologie, de l'économie, des probabilités. . . , conduisant à la résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

1. L'exercice proposé au candidat

Une loi de Newton stipule que la vitesse de refroidissement d'un corps reste proportionnelle à la différence entre la température de ce corps à l'instant t et la température constante de l'air ambiant (le coefficient de proportionnalité dépend essentiellement de la surface de contact entre le corps et son milieu, et on considérera ici que ce coefficient est constant).

- 1) Préciser et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la température $\theta(t)$ à l'instant $t > t_0$, d'un corps porté initialement (c'est-à-dire à l'instant t_0) à la température θ_0 , et qui est plongé dans un environnement dont la température constante est égale à θ_c .
- 2) La température de votre cuisine (et de votre appartement) est constante, égale à 20°C . Quand vous le sortez du four à 20h, la température du gâteau que vous avez préparé pour vos invités est 180°C . Vous observez qu'à 20h30 elle est encore de 100°C .
A quelle heure pourrez-vous le servir à la température idéale, soit 25°C ?
- 3) Comme vous voulez absolument servir votre gâteau à 22h précises, vous commencez par le placer dès 20h sur le rebord de votre fenêtre, où l'air ambiant est à une température de 0°C .
Combien de temps devrez-vous le laisser sur ce rebord avant de le rentrer à l'intérieur pour que vos invités puissent le déguster à 22h à la température idéale?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :

- Q.1) Préciser l'équation différentielle utilisée dans la première question de l'exercice et sa solution générale. Comment traiteriez-vous cette résolution dans une classe de terminale?
- Q.2) Indiquer la façon dont vous pourriez mettre en place un tel exercice dans une classe de terminale S (notions traitées au préalable, rôle joué par les outils de calculs numériques et/ou formel, synthèse de la résolution, éventuellement proposition de questions intermédiaires...)
- Q.3) Proposer un ou deux exercices issus de la géométrie, de la physique, de la biologie, de l'économie ou des probabilités, etc. et conduisant à la résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

DOSSIER n° 19. Equations différentielles Problèmes issues de la géométrie, de la physique, de la biologie, de l'économie, des probabilités .. , conduisant à la résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Programme : Terminale S.

Ce dossier aborde des points particulièrement délicats, et c'est pourquoi le rapport le concernant est plus développé. L'exercice proposé par le jury mettait très consciemment en œuvre une «modélisation» appartenant aux sciences physiques, et la manière dont les questions étaient posées était délibérément plus exigeante que celle habituellement utilisée dans les classes de lycée. En effet, l'habitude de se poser des problèmes issus de situations concrètes s'est tellement perdue et transformée que, lorsque l'on fait appel au monde concret dans un exercice de mathématiques, on prend dans son énoncé toutes sortes de précautions (définition, rappel de propriétés physiques, etc.), qui font que l'exercice peut se résoudre quasiment sans même lire la partie consacrée à la modélisation - ou sans la comprendre s'il le faut.

Nous avons très volontairement voulu sortir de ce schéma, et puisqu'il s'agit ici de poser ce qui est susceptible d'influer sur la norme en matière de formation d'enseignants, espéré ainsi faire évoluer cette norme et les conséquences qu'elle entraîne dans les classes. A ce titre, nous ne donnons pas l'équation différentielle, et nous laissons au candidat le choix de l'unité de temps.

Dans l'ensemble, les commissions ont noté que ce dossier était nettement plus difficile que la plupart des autres. Cependant, nous pouvons affirmer que la notation de ce dossier est équitable, la difficulté du dossier ayant été prise en compte, et les résultats du concours permettent de confirmer que les candidats ayant traité ce dossier n'ont pas été pénalisés.

On attendait du candidat qu'il sache interpréter le signe de la constante k , et qu'il sache faire intervenir des potentialités des calculatrices dans son exposé (la question Q.2 l'indique ; il est possible par exemple d'effectuer des présentations graphiques, de montrer l'évolution des solutions en fonction des paramètres, d'utiliser le calcul formel, de mettre en œuvre la méthode d'Euler).

On a observé certaines utilisations de bonne facture des exemples tirés du document d'accompagnement des Terminales S.

Thème: Equations différentielles.

1) L'exercice proposé au candidat

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \begin{cases} \frac{\Theta'(t)}{\Theta(t) - \Theta_c} = k \\ \Theta(t_0) = \Theta_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Theta'(t) = k(\Theta(t) - \Theta_c) \\ \Theta(t_0) = \Theta_0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \Theta(t) = C e^{kt} + \Theta_c \\ \Theta(t_0) = \Theta_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Theta(t) = C e^{kt} + \Theta_c \\ \Theta(t_0) = C e^{kt_0} + \Theta_c = \Theta_0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \Theta(t) = (\Theta_0 - \Theta_c) e^{k(t-t_0)} + \Theta_c
 \end{aligned}$$

2). On exprime le temps en minute.

$$\text{Ainsi } \Theta(30) = (180 - 20) e^{\frac{k \times 30}{60}} + 20 = 100$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{30k}{60}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{\ln 2}{30}$$

On cherche t_1 tel que $\Theta(t_1) = 25$
 $t_1 = 150$

Donc on pourra servir le gâteau à 22h30.

3) t_0 : on sort le gâteau du four à dehors (20h)

t_1 : on rentre le gâteau dans la cuisine

t_2 : on sert le gâteau à 25° (22h)

$$\begin{aligned}
 \Theta(t_1) &= (180 - 0) e^{-\frac{\ln 2}{30}(t_1 - t_0)} + 0 \\
 \Theta(t_2) &= (\Theta(t_1) - 20) e^{-\frac{\ln 2}{30}(t_2 - t_1)} + 20 \\
 &= (180 e^{-\frac{\ln 2}{30}(t_1 - t_0)} - 20) e^{-\frac{\ln 2}{30}(t_2 - t_1)} + 20 \\
 &= 180 e^{-\frac{\ln 2}{30}(t_2 - t_0)} - 20 e^{-\frac{\ln 2}{30}(t_2 - t_1)} + 20 \\
 &= 180 e^{-\frac{\ln 2}{30} \times 120} - 20 e^{-\frac{\ln 2}{30}(t_2 - t_1)} + 20 \\
 &= 25
 \end{aligned}$$

$$\text{on trouve } t_2 - t_1 = \frac{-30 \ln(5/16)}{\ln(2)} \approx 50$$

Ainsi on doit laisser le gâteau 1h10 dehors

2) La travail demandé au candidat

Q1) L'équation est de la forme

$$\begin{cases} y' = ay + b \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

en classe de TS:

$a \neq 0$ d'où l'ensemble de solutions:

$$\{f(x) = C \exp(ax) - b/a \text{ où } C \text{ constante réelle}\}$$

Q2) notations mes au préalable:

• fct exp / ln

• Équa. diff de la forme $y' = ay$, $a \neq 0$, puis $y' = ay + b$

* signe de la constante k: k est négatif car la température diminue.

* représentations graphiques:

- représenter les solutions en changeant les paramètres initiaux (par exemple comparer les courbes lorsque l'air ambiant vaut 20° ou 0°) val 2 | 0 1707051 (image)
- représenter la courbe réponse à la question 3)

val 2 | 0 1707052 (image)
(val 2 | 0 170705 (fonction))

* mettre en œuvre la méthode d'Euler:

$$\text{Approcher } y(x) = (180 - 20) e^{\frac{\ln 2}{30} \times x} + 20$$

sur $[0; 120]$ avec un pas de 10 minutes

val 2 | 0 1707054 (sheet)

* questions intermédiaires:

- donner l'équation différentielle
- imposer une unité de temps
- introduire t_0 , t_1 et t_2 dans 3).