1317

Thème : Suites

Approximation d'un réel à l'aide de suite

1. L'exercice proposé au candidat

1) On considère les réels $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{1-t}\mathrm{d}t$ pour tout n entier non nul et $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{1-t}\mathrm{d}t$

   a) Calculer I_0 et I_1.

   b) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel non nul, on a :

$$I_n - I_{n-1} = -\frac{1}{n!}.$$

   c) En déduire que pour tout entier naturel n on a : $I_n = \mathrm{e} - \displaystyle\sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!}$.

2) Montrer que pour tout entier naturel non nul , $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n!}$.
   En déduire la limite de la suite (I_n) et un encadrement de e.

2. Le travail demandé au candidat

> En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
> Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :

Q.1) Dégager les méthodes utilisées dans cet exercice.

Q.2) Proposer un ou plusieurs exercices permettant l'approximation d'un nombre réel par une suite.

DOSSIER n° 15. Suites Approximation d'un réel à l'aide de suites.

Programmes : Terminale S.

Le dossier était suffisamment riche pour permettre une évaluation significative. Il a été noté que le majorant $\frac{1}{n!}$ de la question 2 présentait une difficulté supplémentaire peu utile, et qu'un majorant plus facile à établir tel que $\frac{3}{n!}$ aurait tout aussi bien permis l'évaluation sur les points souhaités.

La question 1)c était destinée à être résolue à l'aide d'un raisonnement par récurrence. Un changement d'indice dans des sommations finies menait aussi au résultat souhaité, mais ce genre de technique n'appartient pas aux programmes des classes de l'enseignement secondaire. C'est pourquoi les candidats ayant employé une méthode par changement d'indice ont pu être interrogés sur l'utilisation du raisonnement par récurrence.

Le manque de diversité des exercices proposés par les candidats est régulièrement mentionné.

L'intégration par parties a fait l'objet de questions de la part du jury, et beaucoup d'imprécisions quant aux hypothèses de validité sont également mentionnées.

13/07/2005

Thème Suites

Approximation d'un réel à l'aide de suites.

1) L'exercice proposé au candidat

1) $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t}\,dt$

a) $I_0 = \int_0^1 e^{1-t}\,dt = \left[-e^{1-t}\right]_0^1 = e - 1$

$I_1 = \int_0^1 \underset{v}{t}\, \underset{u'}{e^{1-t}}\,dt = \left[-e^{1-t}\,t\right]_0^1 + \int_0^1 e^{1-t}\,dt$

$= -1 + e - 1 = e - 2$

b) $I_n = \int_0^1 \underbrace{\frac{t^n}{n!}}_{v} \underbrace{e^{1-t}}_{u'}\,dt = \left[-e^{1-t}\frac{t^n}{n!}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{1-t}\,dt$

$= -\frac{1}{n!} + I_{n-1}$

d'où $I_n - I_{n-1} = -1/n!$

c) $I_n = I_{n-1} - 1/n!$

$= I_{n-2} - 1/(n-1)! - 1/n!$

$= I_0 - 1/1! - 1/2! \cdots - 1/(n-1)! - 1/n!$

$= e - 1 - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}$

$= e - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$

2) $I_n \geq 0$ car c'est l'intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction positive.

$f_n : t \mapsto \frac{t^n}{n!} e^{1-t}$

$f_n'(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{1-t} - \frac{t^n}{n!} e^{1-t}$

$= \frac{e^{1-t}}{(n-1)!}\,(n t^{n-1} - t^n) \geq 0$ car $t \in [0;1]$

donc $f_n(t) \leq f_n(1)$ $\forall t \in [0,1]$

Donc $I_n \leq \int_0^1 \frac{1^n}{n!} e^{1-1}\,dt = \frac{1}{n!}$

Par le théorème des gendarmes : $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

et donc

$$\boxed{\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \leq e \leq \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n!}}$$

2) Le travail demandé au candidat

1)
- intégration par parties
- récurrence sur une somme finie
- l'intégrale entre a et b (avec $a < b$) d'une fonction positive est positive.
- Si $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)$
- théorème des gendarmes.