Thème : Suites
Approximation d'un nombre réel à l'aide de suites

1. L'exercice proposé au candidat :

Une vérification simple montre que $2 \leq \sqrt{7} \leq 3$. On pose $I = [2, 3]$

1)

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - \frac{1}{4}(u_n^2 - 7) \\ u_0 \in [2, 3] \end{cases}$$

Conjecturer à l'aide d'une calculatrice le comportement asymptotique de la suite (u_n) .

2) Etudier la convergence de la suite (u_n) .

On pourra notamment introduire la fonction f définie par : $f(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 - 7)$, montrer que l'intervalle I est stable par f , (c'est à dire que pour tout élément x de I , $f(x)$ est encore un élément de I), puis que :

$$\text{Si } 2 \leq x \leq 3 \text{ et } 2 \leq y \leq 3 \text{ alors } |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

et utiliser ce résultat pour obtenir une majoration de $|u_n - \sqrt{7}|$.

3) Montrer que $\sqrt{7}$ est toujours compris entre deux termes consécutifs de la suite.

4) On se fixe une précision ε , ($10^{-6} < \varepsilon < 1$). A l'aide de la calculatrice, déterminer deux termes consécutifs de la suite (u_n) permettant d'avoir une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à la précision ε .

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Q.1) Présenter le travail réalisé sur la calculatrice.

Q.2) Rédiger un énoncé de niveau terminale permettant d'étudier la convergence de la suite (u_n) et de déterminer une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-2} près.

Q.3) Proposer un ou plusieurs exercices permettant de déterminer des valeurs approchées d'un nombre réel à l'aide d'une suite à une précision donnée.

DOSSIER n° 7. Suites. Approximation d'un nombre réel à l'aide de suites

Programmes : Première S, Terminale S

Ce sujet, assez classique, a bien rempli sa fonction d'évaluation des candidats. Les prestations ont été très variées, depuis les meilleures (abordant par exemple de manière pertinente la vitesse de convergence) jusqu'aux moins bonnes dans lesquelles on relève les formes d'erreurs coutumières, tant sur les connaissances de bases qu'en matière de raisonnement logique. L'utilisation de la calculatrice a mis en évidence la même variété de compétences, notamment pour l'affichage graphique de la suite récurrente ou la programmation du test d'arrêt.

Le travail demandé aux candidats sur l'exercice proposé par le jury était relativement important, notamment si on le compare aux travaux demandés pour d'autres dossiers. De nombreux candidats ne savent pas que le théorème dit «des accroissements finis» ne figure plus au programme (de la terminale scientifique).

Thème: Suites

Approximation d'un nombre réel à l'aide de suites

1) L'exercice proposé au candidat

1) $(u_n)_n$ est pas monotone, et semble convergente

2) $f(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 - 7)$

$$\left. \begin{aligned} 2 \leq x \leq 3 \\ 4 \leq x^2 \leq 9 \\ \Rightarrow 3 \leq \frac{4(x^2 - 7)}{4} \leq 1/2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1,75 \leq x - \frac{1}{4}(x^2 - 7) \leq 2,5$$

Donc I est stable par f.

$f'(x) = -\frac{x}{2} + 1$ donc $\forall x \in I \ 0 \leq f'(x) \leq 1/2$

d'où $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$

$$\begin{aligned} |u_n - \sqrt{7}| &= |f(u_{n-1}) - f(\sqrt{7})| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \sqrt{7}| \\ &\leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \sqrt{7}| \end{aligned}$$

Donc (u_n) converge vers $\sqrt{7}$.

$$\begin{aligned} 3) \ u_{n+1} - \sqrt{7} &= (u_n - \sqrt{7}) - \frac{1}{4}(u_n^2 - 7) \\ &= (u_n - \sqrt{7}) \left[1 - \frac{1}{4}(u_n + \sqrt{7}) \right] \end{aligned}$$

• si $u_n - \sqrt{7} > 0$, $u_n > \sqrt{7}$
 $\Rightarrow \frac{u_n + \sqrt{7}}{4} > \frac{\sqrt{7}}{2}$
 $\Rightarrow 1 - \frac{1}{4}(u_n + \sqrt{7}) \leq 1 - \frac{\sqrt{7}}{2} \leq 0$ i.e. $u_{n+1} - \sqrt{7} \leq 0$

• si $u_n - \sqrt{7} < 0$,

$$\begin{aligned} 2 \leq u_n &\Leftrightarrow \frac{2 + \sqrt{7}}{4} \leq u_n + \sqrt{7} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4}(u_n + \sqrt{7}) \leq \frac{2}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4} \leq 0 \end{aligned}$$

i.e. $u_{n+1} - \sqrt{7} > 0$

4) $\mathcal{Q}$ ad 210020705(u_0, ϵ).

2) Le travail demandé au candidat

Q1) * Présenter l'affichage de la suite, de deux manières.

1) En mode $f(n) = n$

2) En mode "Table" avec tracé des termes les uns après les autres.

* Présenter quelques applications de l'algorithme avec des valeurs de n_0 différentes et des valeurs de ϵ différentes.

$$\begin{aligned} Q2) \ f(x) - f(y) &= x - \frac{1}{4}(x^2 - 7) - y + \frac{1}{4}(y^2 - 7) \\ &= x - y - \frac{1}{4}(x^2 - y^2) \\ &= (x - y) \left[1 - \frac{1}{4}(x + y) \right] \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \leq x \leq 3 \\ 2 \leq y \leq 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 \leq \frac{x+y}{4} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{x+y}{4} \leq 0$$

• Par récurrence on montre $|u_n - \sqrt{7}| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \sqrt{7}|$

$\rightarrow$ si $n=0$ OK

$\rightarrow$ si $|u_n - \sqrt{7}| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \sqrt{7}|$

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \sqrt{7}| &= |f(u_n) - f(\sqrt{7})| \leq |u_n - \sqrt{7}| \left[1 - \frac{1}{4}(u_n + \sqrt{7}) \right] \\ &\leq \frac{1}{2} |u_n - \sqrt{7}| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |u_0 - \sqrt{7}| \end{aligned}$$

d'où la convergence de $(u_n)_n$ vers $\sqrt{7}$.

Énoncé Terminal de S:

1) Montrer que $f(x) - f(y) = (x-y) \left[1 - \frac{x+y}{4} \right]$.

2) Montrer par récurrence que $|u_n - \sqrt{7}| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \sqrt{7}| \forall n$

indication:

$$|u_{n+1} - \sqrt{7}| = |f(u_n) - f(\sqrt{7})|$$

3) En déduire la convergence de $(u_n)_n$ vers $\sqrt{7}$

4) Montrer que $|u_n - \sqrt{7}| \leq 10^{-2} \Rightarrow n \geq \frac{\ln(10^2 |u_0 - \sqrt{7}|)}{\ln(2)}$