Thème : Outils
Les nombres complexes

1. L'exercice proposé au candidat :

On se donne trois points non alignés A, B, C du plan, et le triangle T de sommets A, B, C.
On se propose ici de démontrer *uniquement à l'aide des nombres complexes* la propriété géométrique classique suivante :

Les hauteurs de T sont concourantes en un point H, appelé *orthocentre* de T.

1) Montrer qu'on peut munir le plan d'un repère orthonormé tel que les affixes respectives a, b, c des points A, B, C soient de module 1. On suppose qu'il en est ainsi dans la suite de l'exercice.

2) On définit le point H d'affixe $h = a + b + c$.
Montrer que les hauteurs du triangle T se coupent au point H (indication : considérer $z = \dfrac{h-c}{b-a}$)
Montrer que H est aligné avec le centre de gravité de T et le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :

Q.1) Illustrer le résultat à l'aide du module de géométrie de la calculatrice.

Q.2) Comment mettriez-vous en place, dans une classe, le choix du repère ?
Quel(s) prolongement(s) pourriez-vous proposer à cet exercice ?

Q.3) Proposer un ou deux exercices présentant la résolution, à l'aide des complexes, d'un problème de géométrie.

DOSSIER n° 4. Outils. Les nombres complexes

Programmes : Terminale S

Un grand nombre de candidats ont mal compris la dernière question, et ont proposé des exercices sur les nombres complexes, au lieu d'exercices de géométrie résolus à l'aide des nombres complexes.

Ce dossier a été discriminant, et plus directif que d'autres dossiers. Beaucoup de candidats ne sont pas parvenus à résoudre seuls l'exercice proposé par le jury, notamment car ils éprouvaient des difficultés à manipuler ou interpréter des rapports du type $(a-b)/(c-d)$ dans le corps des complexes.

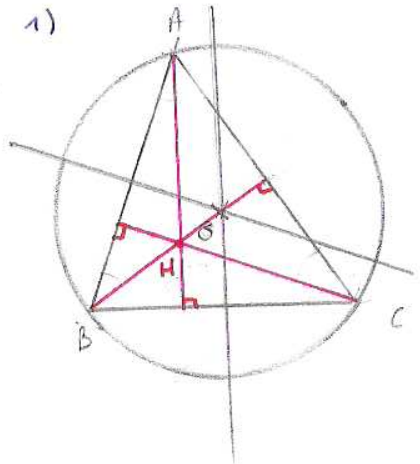
L'usage de la calculatrice a été aussi un facteur discriminant : on a rencontré des candidats ne l'utilisant pas du tout, par défaut de pratique, parmi d'autres qui au contraire l'ont très bien utilisée. Peu de candidats ont utilisé les possibilités d'animation des figures.

29/6/5

Thème : Outils
Les nombres complexes

1) L'exercice proposé au candidat

1)



Il suffit de prendre pour origine du repère le point O, centre du cercle circonscrit à ABC de sorte que OA = OB = OC et de prendre OA comme unité. Dans ce cas $|a| = |b| = |c| = 1$.

2) $h = a + b + c$

Par définition, si on note H' l'orthocentre de T, alors

$\overrightarrow{H'C} \cdot \overrightarrow{BA} = \vec{0} \iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CH'}) = \frac{\pi}{2} \ (\pi)$

$\iff \arg\left(\frac{h'-c}{b-a}\right) = \pi/2 \ (\pi)$

$\iff \frac{h'-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$

$\iff (h'-c)\overline{(b-a)} \in i\mathbb{R}$

or $(a+b+c-c)\overline{(b-a)} = (a+b)(\bar{b}-\bar{a})$
$= a\bar{b} - a\bar{a} + b\bar{b} - b\bar{a}$ (avec $a\bar{a} = 1$, $b\bar{b} = 1$)
$= a\bar{b} - \bar{a}b$
$= a\bar{b} - \overline{a\bar{b}}$
$= 2i\,\mathrm{Im}(a\bar{b}) \in i\mathbb{R}$

a, b et c jouant un rôle symétrique, on conclut que h est solution, d'où H = H'.

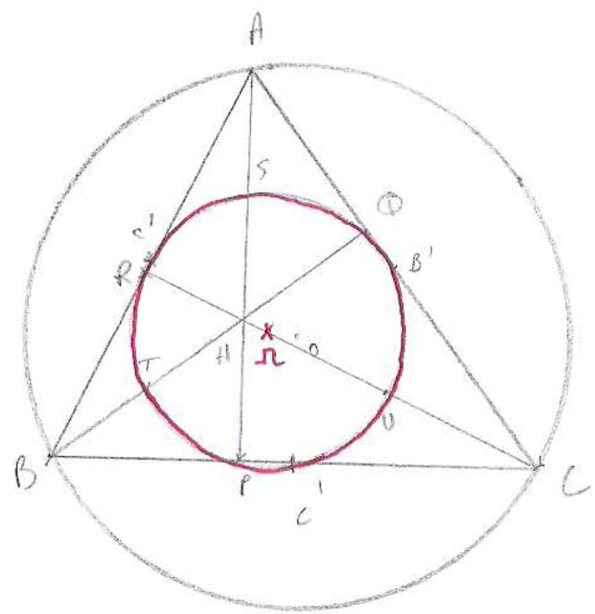
On a par définition $g = \frac{a+b+c}{3}$

donc $3g = h$

Ainsi les trois points O, G, H sont alignés et on a même $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$.

2) Le travail demandé au candidat

1) Calculatrice oral 21 a 190606

2) Traduire le fait que :
$|a| = |b| = |c| \iff$ A, B et C sont à égale distance de l'origine O du repère
$\iff$ A, B et C sont sur un cercle de centre O.
puis normaliser (c.à.d prendre OA comme unité).

prolongement : Cercle des neuf points (ou cercle d'Euler).